UNE RÉUNION DE PROFESSEURS

ALGÈBRE

ET

TRIGONOMÉTRIE

CLASSES DE SECONDE
ET DE PREMIÈRE

LIGEL
77, RUE DE VAUGIRARD, PARIS VI^E

UNE RÉUNION DE PROFESSEURS

ALGÈBRE

et

TRIGONOMÉTRIE

LIGEL — 77, rue de Vaugirard — Paris VIe

UNE RÉUNION DE PROFESSEURS

MATHÉMATIQUES

- 195 E. *Géométrie*, cl. de 5e, 4e, 3e, cours complémentaire.
- 196 E. *Géométrie*, cl. de 5e, 4e, 3e, enseignement secondaire.
- 198 E. *Algèbre*, cl. de 5e, 4e, 3e, cours complémentaire.
- 199 E. *Algèbre*, cl. de 5e, 4e, 3e, enseignement secondaire.
- 264 E. *Algèbre et trigonométrie*, cl. de 2e et de 1re.
- 266 E. *Cours de géométrie*, cl. de 2e et de 1re.
- 265 E. *Cours de géométrie*, cl. de mathématiques.
- 263 E. *Compléments d'algèbre*, cl. de mathématiques.
- 271 E. *Cours de géométrie descriptive*, cl. de mathématiques.
- 277 E. *Cours de mécanique*, cl. de mathématiques.
- 269 E. *Cours de trigonométrie*, cl. de mathématiques.

ALGÈBRE

ET

TRIGONOMÉTRIE

par

UNE RÉUNION DE PROFESSEURS

CLASSES DE SECONDE
ET DE PREMIÈRE

LIGEL
77, RUE DE VAUGIRARD, PARIS VIe

ALPHABET GREC

FIGURE		VALEUR	APPELLATION
MAJUSC.	MINUSC.		
A	α	a	*alpha*
B	β, ϐ	b	*bêta*
Γ	γ	g	*gamma*
Δ	δ	d	*delta*
E	ε	é *bref*	*epsilonn*
Z	ζ	dz	*dzêta*
H	η	ê *long*	*êta*
Θ	θ	th	*thêta*
I	ι	i	*iôta*
K	ϰ	k	*kappa*
Λ	λ	l	*lambda*
M	μ	m	*mu*
N	ν	n	*nu*
Ξ	ξ	x	*ksi*
O	ο	o *bref*	*omicronn*
Π	π	p	*pi*
P	ρ	r	*rô*
Σ	σ, ς	s	*sigma*
T	τ	t	*tau*
Υ	υ	u	*upsilonn*
Φ	φ	ph, f	*phi*
X	χ	ch *dur*	*khi*
Ψ	ψ	ps	*psi*
Ω	ω	ô *long*	*ôméga*

PROGRAMMES OFFICIELS DU 27 JUIN 1945

CLASSES DE SECONDE C ET MODERNE

I. Nombres algébriques (positifs, nuls, négatifs).

Opérations sur ces nombres ; propriétés fondamentales des opérations ; puissances entières positives.

Rapports et proportions.

Monômes et polynômes : réductions ; identités remarquables. Fractions rationnelles ; exercices et calcul.

II. Vecteurs ; mesure algébrique d'un vecteur sur un axe ; Relation de Chasles ; repérage d'un point sur un axe. Repérage d'un point sur un plan par des coordonnées rectangulaires.

III. Fonction d'une variable ; accroissement ; fonction croissante et décroissante dans un intervalle.

Étude de la fonction linéaire ; représentation graphique ; pente d'une droite.

Étude des fonctions $y = x^2$, $y = ax^2$, $y = 1/x$; $y = a/x$; représentation graphique.

IV. Résolution et discussion de l'équation et de l'inéquation du premier degré à une inconnue.

Résolution et discussion d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

Problèmes du premier degré ; discussion des résultats.

V. Équation du second degré à une inconnue ; existence et calcul des racines ; somme et produit des racines, signe des racines ;

Transformation du trinôme du second degré ; signe du trinôme du second degré ; inéquations du second degré à une inconnue.

CLASSES DE PREMIÈRE C ET MODERNE

Algèbre

I. Équation générale du second degré à une inconnue.

Existence et calcul des racines. Somme et produit des racines ; signe des racines. Recherche de deux nombres ayant pour somme et produit deux nombres donnés.

Étude du trinôme du second degré ; application à la résolution de l'inéquation du second degré à une inconnue et à la détermination de la position d'un nombre par rapport aux racines d'une équation du second degré.

II. Variation du trinôme du second degré. Représentation graphique.

Variation de la fonction homographique. Représentation graphique.

III. Définition et signification géométrique de la dérivée d'une fonction pour une valeur donnée de la variable.

Application à la représentation des tangentes aux courbes représentatives d'un trinôme du second degré et d'une fonction homographique.

(L'étude du sens de variation d'une fonction à l'aide de la dérivée n'est pas au programme.)

Équation horaire d'un mouvement rectiligne uniforme.

Mouvement rectiligne uniforme ; valeur algébrique de la vitesse. Mouvement rectiligne uniformément varié défini par une équation horaire ; valeur algébrique de la vitesse à un instant donné.

Diagrammes de ces mouvements.

IV. Problèmes dont la résolution conduit à une équation du premier ou du second degré ou à un système de deux équations du premier degré.

Trigonométrie

Extension de la notion d'arc et de la notion d'angle.

Fonctions circulaires (sinus, cosinus, tangente, cotangente). Périodicité : Relations entre les fonctions circulaires d'un même arc.

Fonctions circulaires correspondant à des arcs opposés, à des arcs complémentaires, à des arcs supplémentaires. Valeurs des fonctions circulaires pour quelques arcs remarquables.

Équations $\sin x = \sin a$; $\cos x = \cos a$; $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$.

Somme géométrique de vecteurs ; projection d'une somme géométrique sur un axe.

Formules donnant le sinus, le cosinus, la tangente de la somme ou de la différence de deux arcs.

Expression de $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tg} a$ en fonction de $\operatorname{tg} a/2$.

Usage des tables de sinus, cosinus, tangentes.

Problèmes simples d'origine géométrique conduisant à une équation du premier ou du second degré quand on prend pour inconnue un sinus, un cosinus ou une tangente.

COURS D'ALGÈBRE

CHAPITRE I

NOMBRES ALGÉBRIQUES

§ I. *DÉFINITIONS.*

1. NOMBRES POSITIFS ET NOMBRES NÉGATIFS.

Soit une droite $x'x$ sur laquelle se meut un mobile M. Pour déterminer la position qu'il occupe sur cette droite à un moment donné, on ne peut se contenter de dire qu'il est à 5 cm d'un point O pris sur cette droite ; il existe, en effet, de part et d'autre du point O, deux points M' et M'' tels que :

$$OM' = OM'' = 5 \text{ cm}.$$

Fig. 1.

Il faut indiquer de plus, si cette longueur doit être portée à gauche ou à droite du point O.

On convient, pour cela, de choisir sur l'axe $x'x$ un sens de parcours qui sera dit le sens positif, par exemple ici : celui de x' vers x, de gauche à droite. Le sens opposé sera dit le **sens négatif**. La droite ainsi orientée sera appelée **axe**.

La distance du point O au point M mesurée avec une unité convenablement choisie sera représentée par un nombre arithmétique.

On convient de le faire précéder du signe + (que l'on énonce plus), si pour aller de O en M, on doit se déplacer dans le sens positif ; on le fera précéder du signe — (que l'on énonce moins) si le parcours de O en M s'effectue dans le sens négatif.

Ainsi :

$$\overline{OM'} = +5 \qquad \overline{OM''} = -5.$$

L'ensemble du nombre arithmétique et du signe qui le précède constitue un nombre algébrique.

Un nombre arithmétique précédé du signe + est un nombre positif.
Un nombre arithmétique précédé du signe — est un nombre négatif.

Lorsque le point M est en O, sa distance à O est nulle. *Le nombre zéro, marquera donc la séparation des nombres positifs et des nombres négatifs.*

La mesure des distances sur une droite, à partir d'un point donné, n'est pas le seul exemple d'utilisation des nombres algébriques. On les emploiera chaque fois qu'une grandeur pourra être évaluée dans deux sens différents; par exemple, une température par rapport à celle de la glace fondante, une altitude par rapport au niveau de la mer, etc.

2. VALEUR ABSOLUE D'UN NOMBRE ALGÉBRIQUE. — ***La valeur absolue d'un nombre algébrique est la valeur arithmétique de ce nombre prise indépendamment du signe.*** Elle s'indique en plaçant le nombre entre deux traits verticaux $| \ |$.

La valeur absolue de $-\frac{7}{5}$ est $\frac{7}{5}$.

Si $x = -5$, sa valeur absolue est 5 qui se note $|x| = 5$ et s'énonce *valeur absolue de x égale 5. Deux nombres algébriques sont dits* **égaux,** s'ils ont *même valeur absolue et même signe.*

$$-\frac{12}{4} = -3\,; \quad +\frac{10}{6} = +\frac{5}{3}.$$

Ils sont **opposés** s'ils ont *même valeur absolue, mais sont de signes contraires.*

Ainsi : $+3$ et -3, $+4$ et $-\frac{8}{2}$.

Le nombre opposé à x se note $-x$.

Remarque. — Dans la plupart des cas, on sous-entend le signe + placé devant un nombre positif.

APPLICATION DES NOMBRES ALGÉBRIQUES A LA MESURE DES VECTEURS

3. DÉFINITIONS. — ***Une droite orientée ou axe est une droite sur laquelle on a choisi un sens positif de parcours. Un vecteur est un segment de droite orienté :*** Il est caractérisé par son **origine** et son **extrémité**. Le vecteur dont l'origine est A et l'extrémité B s'écrit $\overrightarrow{AB}$ et s'énonce vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Les éléments d'un vecteur sont :

son **origine** ou point d'application : A ;

sa **direction** qui est celle de la droite qui le porte ou de toute autre droite à laquelle il est parallèle : $x'x$;

son **sens** qui est celui du mouvement d'un mobile qui irait de son origine A à son extrémité B ;

sa **grandeur** qui est la mesure de la longueur du segment AB mesurée avec une unité convenablement choisie.

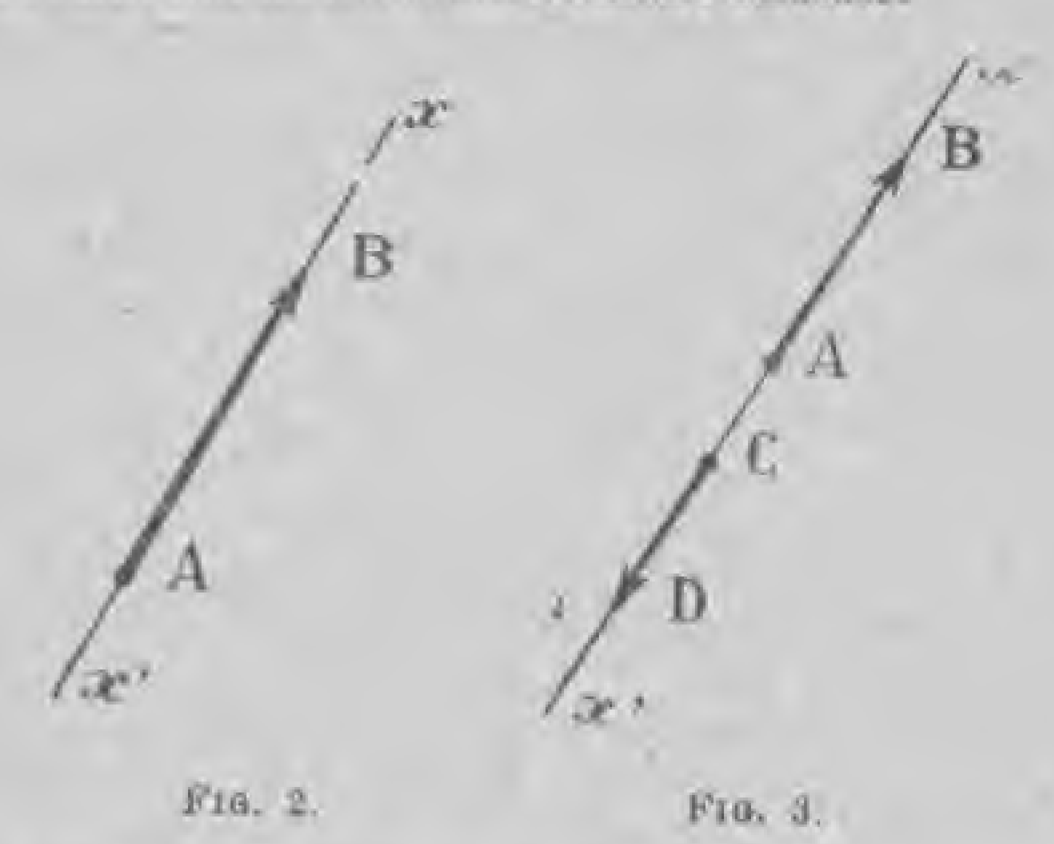


FIG. 2. FIG. 3.

Les deux derniers éléments sens et grandeur peuvent être réunis en un seul qui est la **mesure algébrique** du **vecteur** $\overrightarrow{AB}$, et qui se note $\overline{AB}$. Elle est donnée par un nombre algébrique dont la valeur absolue est la mesure de la longueur de AB. On l'affecte du signe + ou du signe — suivant que le vecteur est de même sens que l'axe $x'x$ ou est de sens contraire.

Ainsi : $\overline{AB} = +4$, $\overline{CD} = -3$.

§ II. ADDITION ET SOUSTRACTION ALGÉBRIQUES.

4. SOMME DE DEUX NOMBRES ALGÉBRIQUES.

On appelle **somme de deux nombres algébriques de même signe** (tous deux positifs ou tous deux négatifs), *le nombre algébrique dont la valeur absolue est la somme des valeurs absolues des deux nombres et dont le signe est le signe commun aux deux nombres.*

$$(+3) + (+5) = +8 \qquad (-3) + (-5) = -8.$$

On appelle **somme de deux nombres algébriques de signes différents** *le nombre algébrique dont la valeur absolue est la différence des valeurs absolues des deux nombres et dont le signe est celui du nombre qui a la plus grande valeur absolue.*

$$(+3) + (-5) = -2 \qquad (+5) + (-3) = +2.$$

Deux nombres opposés ont pour somme zéro.

Il résulte de cette règle que la somme de **deux** nombres algébriques ne dépend pas de leur ordre.

5. RÉSULTANTE DE DEUX VECTEURS CONSÉCUTIFS PLACÉS SUR UN MÊME AXE.

Deux vecteurs consécutifs sont des vecteurs tels que l'extrémité du premier coïncide avec l'origine du second.

Exemple : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$,

La résultante de deux vecteurs consécutifs est le vecteur qui a pour origine, l'origine du premier et pour extrémité, l'extrémité du second.

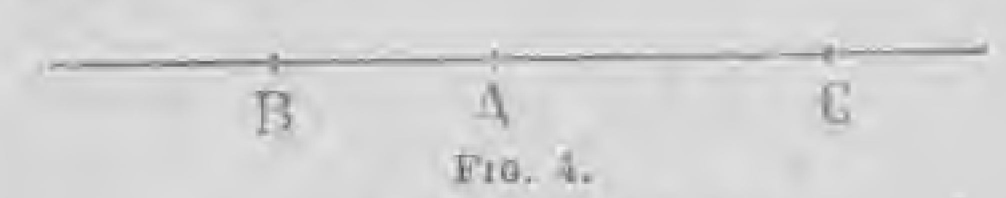


Fig. 4.

$\overrightarrow{AC}$ est la résultante des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ s'appellent les vecteurs composants ou simplement composantes.

Si le point C coïncide avec le point A, la résultante est nulle.

6. MESURE ALGÉBRIQUE DE LA RÉSULTANTE DE DEUX VECTEURS CONSÉCUTIFS DE MÊME SUPPORT.

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ces deux vecteurs. Leur résultante est $\overrightarrow{AC}$.

On a toujours entre les mesures algébriques de ces trois vecteurs la relation :

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}, \qquad (1)$$

qui est dite relation de Chasles.

On la vérifie immédiatement sur les quatre cas de figures possibles :

A B C

A C B

B C A

C B A

Fig. 5.

$\overline{AB} = +7$, $\overline{BC} = +3$, $\overline{AC} = +10$.

$\overline{AB} = +7$, $\overline{BC} = -3$, $\overline{AC} = +4$.

$\overline{AB} = -7$, $\overline{BC} = +3$, $\overline{AC} = -4$.

$\overline{AB} = -7$, $\overline{BC} = -3$, $\overline{AC} = -10$.

7. SOMME DE PLUSIEURS NOMBRES ALGÉBRIQUES.

La somme de plusieurs nombres algébriques rangés dans un certain ordre, est le résultat obtenu en faisant la somme des deux premiers, puis en ajoutant au résultat obtenu le troisième nombre et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait employé tous les nombres considérés.

Ainsi :

$$\begin{aligned} & (-5) + (+3) + (-4) + (+3) \\ = & (-2) + (-4) + (+3) \\ = & (-6) + (+3) \\ = & -3. \end{aligned}$$

8. VALEUR ALGÉBRIQUE DE LA RÉSULTANTE DE PLUSIEURS VECTEURS CONSÉCUTIFS DE MÊME SUPPORT.

La résultante de plusieurs vecteurs consécutifs de même support est le vecteur qui a pour origine l'origine du premier et pour extrémité l'extrémité du dernier.

$\overrightarrow{AE}$ est la résultante des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$.

La mesure algébrique de la résultante est égale à la somme des mesures algébriques des composantes.

x' B A D C E x

Fig. 6.

D'après le n° 6,

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Si l'on ajoute $\overline{CD}$ aux deux membres de cette égalité, on aura :

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AC} + \overline{CD},$$

or : $\overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AD}$ d'après (1),

d'où : $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AD}$.

Si l'on ajoute $\overline{DE}$ aux deux membres

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} = \overline{AD} + \overline{DE};$$

or, de même, $\overline{AD} + \overline{DE} = \overline{AE}$;

donc : $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} = \overline{AE}$.

Cette relation est dite **relation de Chasles**.

Exemple : $\overline{AB} = -4$, $\overline{BC} = +12$, $\overline{CD} = -3$, $\overline{DE} = +7$

$$\begin{aligned} \overline{AE} &= (-4) + (+12) + (-3) + (+7) \\ &= +12. \end{aligned}$$

9. PROPRIÉTÉS DE LA SOMME ALGÉBRIQUE.

1° Elle est **commutative**, c'est-à-dire que *l'on peut sans changer la somme intervertir l'ordre des termes.*

2° Elle est **associative**, c'est-à-dire que *l'on peut remplacer plusieurs termes par leur somme effectuée.*

On peut, par exemple, effectuer la somme des nombres positifs, puis la somme des nombres négatifs et additionner algébriquement les résultats.

10. DIFFÉRENCE DE DEUX NOMBRES ALGÉBRIQUES.

On appelle différence de deux nombres algébriques a et b un troisième nombre c qui ajouté à b, donne pour somme a.

On a, d'après cette définition :

$$b + c = a. \qquad (1)$$

Soit b' le nombre opposé à b ($b' = -b$). Ajoutons b' aux deux membres de l'égalité (1), il vient :

$$b' + b + c = a + b' ;$$

or : $$b' + b = 0,$$

donc : $$c = a + b'.$$

Pour retrancher un nombre algébrique b *d'un nombre* a, *on ajoute à* a *l'opposé de* b.

Cette opération s'indique par le symbole a — b.

Exemples : $(+5) - (+2) = (+5) + (-2) = +3.$

$(+5) - (-2) = (+5) + (+2) = +7.$

11. ABSCISSE D'UN POINT. MESURE ALGÉBRIQUE D'UN VECTEUR.

Étant donnés un axe orienté x'x et une origine O choisie sur cet axe, la distance à l'origine O d'un point M de l'axe est définie par la mesure algébrique du vecteur $\overline{OM}$. Cette mesure algébrique s'appelle ***l'abscisse*** du point M et se désigne ordinairement par x.

$$\overline{OM} = x.$$

Fig. 7.

Exemple : $\overline{OA} = +4 \qquad \overline{OB} = -2 \qquad \overline{OC} = +7.$

La mesure algébrique d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ porté par un axe est égale à l'abscisse de son extrémité B moins l'abscisse de son origine A.

On peut écrire, d'après la relation de Chasles,

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB},$$

or : $$\overline{AO} = -\overline{OA} ;$$

d'où : $$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}.$$

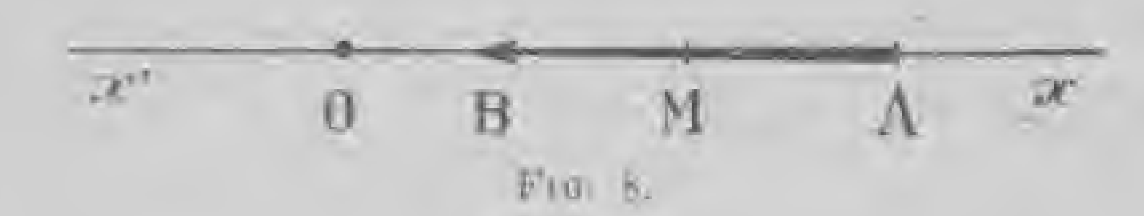


Fig. 8.

Remarque. — Soit M le milieu de $\overrightarrow{AB}$.

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM}$$

et $$\overline{OM} = \overline{OB} + \overline{BM}.$$

D'où en additionnant membre à membre,

$$2\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{AM} + \overline{BM}.$$

Or : $$\overline{AM} = -\overline{BM} \text{ et } \overline{AM} + \overline{BM} = 0$$

donc : $$2\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB}$$

$$\overline{OM} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2}.$$

L'abscisse du point milieu d'un segment porté par un axe est la demi-somme de l'abscisse de son origine et de l'abscisse de son extrémité.

12. POLYNOMES NUMÉRIQUES. — ***Un polynôme numérique est une suite de nombres algébriques unis entre eux par les signes de l'addition et de la soustraction.***

Exemple : $a - b + c - d - e.$

Les nombres qui le forment sont appelés **les termes du polynôme.** Chacun d'eux est associé au signe qui le précède.

Un polynôme peut être considéré comme la somme algébrique de ses termes. On peut écrire :

$$a - b + c - d + e = a + (-b) + (+c) + (-d) + (+e).$$

13. PARENTHÈSES. — ***Des parenthèses ou des crochets indiquent que les opérations qui y sont contenues, doivent être considérées comme effectuées.***

Ainsi : $(5 + 3 - 2) = 6.$

Le signe + placé devant une parenthèse indique que l'on doit

ajouter aux termes qui la précèdent, les résultats des opérations qui sont contenues dans la parenthèse.

Exemple : $8 + (5 + 3 - 2) = 8 + 6 = 14.$

Cela revient à remplacer plusieurs termes par leur somme que l'on suppose effectuée. On peut écrire :

$$8 + (5 + 3 - 2) = 8 + 5 + 3 - 2.$$

Le signe — placé devant une parenthèse indique que l'on doit retrancher des termes précédents le résultat des opérations contenues dans la parenthèse. Ainsi :

$$8 - (5 + 3 - 2) = 8 - 6.$$

Or, retrancher $(5 + 3 - 2)$ de 8 revient à ajouter à 8 les opposés de $(5 + 3 - 2)$; on aura donc :

$$8 - (5 + 3 - 2) = 8 - 5 - 3 + 2.$$

Donc, pour faire disparaître une parenthèse précédée du signe + on conserve les signes des termes placés dans la parenthèse. Pour faire disparaître une parenthèse précédée du signe —, il faut changer les signes des termes placés dans la parenthèse.

14. CLASSEMENT DES NOMBRES ALGÉBRIQUES PAR ORDRE DE GRANDEUR. — Soient a et b deux nombres algébriques inégaux.

a est plus grand que b et l'on écrit : $a > b$, si la différence $a - b$ est positive.

a est plus petit que b et l'on écrit : $a < b$, si la différence $a - b$ est négative.

Considérons la suite des nombres algébriques :

$$-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +5,\ +7, \text{ etc.},$$

d'après ce qui précède, un nombre quelconque de cette suite est plus grand que tout nombre placé à sa gauche. Ces nombres sont placés par ordre de grandeur croissante.

1° *Tout nombre positif est plus grand que zéro et tout nombre négatif est plus petit que zéro.*

Pour indiquer qu'un nombre a est positif ou négatif, on écrit qu'il est supérieur ou inférieur à zéro :

$$a > 0 \quad \text{ou} \quad a < 0.$$

2° *De deux nombres négatifs, le plus petit est celui qui a la plus grande valeur absolue.*

3° *La suite des nombres algébriques est illimitée dans les deux sens.* Il existe toujours, en effet, un nombre positif plus grand qu'un nombre positif donné et un nombre négatif plus petit qu'un nombre négatif donné.

§ III. PRODUIT ET QUOTIENT DES NOMBRES ALGÉBRIQUES.

15. PRODUIT DE DEUX NOMBRES ALGÉBRIQUES. — ***Étant donnés deux nombres algébriques a et b, on appelle produit de ces deux nombres, un troisième nombre ayant pour valeur absolue le produit des valeurs absolues de ces deux nombres et de signe positif si a et b sont de même signe, de signe négatif dans le cas contraire.***

Il se note : $P = a \times b$ ou simplement ab.

et s'énonce a multiplié par b.

a et b sont dits les facteurs du produit.

On a donc : (règle des signes).

+	multiplié par	+	donne	+
+	»	—	»	—
—	»	+	»	—
—	»	—	»	+.

Exemples : $(+3) \times (+5) = +15,\ (+2) \times (-6) = -12$
$(-4) \times (+5) = -20,\ (-3) \times (-7) = 21.$

La règle pour trouver le produit ne dépend pas de l'ordre des facteurs, un produit algébrique est une opération commutative.

16. PRODUIT DE PLUSIEURS NOMBRES ALGÉBRIQUES. ***On appelle produit de plusieurs nombres algébriques, le nombre obtenu en multipliant le premier facteur par le second, le résultat ainsi obtenu par le troisième et ainsi de suite jusqu'à ce que soient employés tous les facteurs.***

Exemples :
$$\begin{aligned} & \underbrace{(+5) \times (-3)} \times (-8) \times (+7) \\ = & \underbrace{(-15) \times (-8)} \times (+7) \\ = & \underbrace{(+120) \times (+7)} \\ = & +840. \end{aligned}$$

Le produit de plusieurs nombres est positif si le nombre des facteurs négatifs est pair ou nul ; il est négatif si les facteurs négatifs sont en nombre impair.

Remarques. — *La valeur d'un produit ne dépend* ni dans son signe, ni dans sa valeur absolue *de l'ordre des facteurs.*

On peut dans un produit remplacer plusieurs facteurs par leur produit effectué.

Exemples : $(+12) \times (-7) \times (-13) \times (-5)$
$= (-5) \times (+12) \times (-13) \times (-7)$.

$$(+7) \times (-2) \times (-3) \times (+4) = (+7) \times (+6) \times (+4).$$

Pour qu'un produit de facteurs soit nul, il suffit que l'un des facteurs soit nul.

17. PRODUIT D'UNE SOMME PAR UN NOMBRE.

Pour multiplier une somme par un nombre, il suffit de multiplier chaque partie de la somme par ce nombre et d'ajouter les résultats.

$$[(-4) + (-2) + (+7)] \times (-3)$$
$$= (-4) \times (-3) + (-2) \times (-3) + (+7) \times (-3)$$
$$[a + b + c] \times m = am + bm + cm.$$

18. PRODUIT D'UNE SOMME PAR UNE SOMME.

Pour multiplier une somme par une somme, il suffit de multiplier chaque partie de la première par chaque partie de la seconde et d'ajouter les résultats.

$$[(-3) + (-2) + (+7)] [(+5) + (-4)]$$
$$= (-3) \times (+5) + (-2) \times (+5) + (+7) \times (+5)$$
$$+ (-3) \times (-4) + (-2) \times (-4) + (+7) \times (-4),$$
$$[a + b + c + d] [m + n] = am + bm + cm + dm$$
$$+ an + bn + cn + dn.$$

19. QUOTIENT DE DEUX NOMBRES ALGÉBRIQUES.

Le quotient de deux nombres algébriques a et b est le nombre algébrique q qui, multiplié par b donne pour produit a.

Le premier nombre a est le **dividende** ; le second b est le **diviseur**.

Le quotient q s'indique par les notations :

$$q = a{:}b \quad \text{ou} \quad q = \frac{a}{b},$$

ce qui s'énonce a divisé par b ou a sur b.

Le quotient a pour valeur absolue le quotient des valeurs absolues de a et de b, il est de signe + si a et b sont de même signe, de signe — si a et b sont de signes contraires.

Exemples : $\frac{+15}{+3} = +5$; $\frac{-12}{+4} = -3$;

$\frac{+10}{-2} = -5 \quad \frac{-6}{-2} = +3.$

Inverse d'un nombre. — *Deux nombres a et b sont dits inverses lorsque leur produit est égal à + 1.*

Chacun d'eux est le quotient de + 1 par l'autre.

Exemple : 3 et $\frac{1}{3}$, $\quad -2$ et $-\frac{1}{2}$.

20. DIVISION D'UNE SOMME PAR UN NOMBRE.

Pour diviser une somme par un nombre, on divise chaque partie de la somme par ce nombre et l'on ajoute les résultats.

$$[(+12) + (-4) + (-8)] : (-2)$$
$$= [(+12) : (-2)] + [(-4) : (-2)] + [(-8) : (-2)].$$

Remarque. — Toutes ces règles supposent que le diviseur b n'est pas nul, car il n'existe aucun nombre qui multiplié par zéro donne un nombre donné a.

La division par zéro est donc impossible.

21. FRACTIONS ALGÉBRIQUES. — ***Une fraction algébrique est le quotient indiqué de deux nombres algébriques.***

Exemple : $\frac{-3}{+4}$, $\frac{+5}{-2}$, $\frac{a}{b}$.

Le dividende porte le nom de **numérateur** ; le diviseur (supposé toujours différent de zéro) le nom de **dénominateur**, les deux nombres sont les **termes** de la fraction.

22. PROPRIÉTÉS. — *Les fractions algébriques jouissent des mêmes propriétés que les fractions arithmétiques.*

En particulier :

On ne change pas la valeur d'une fraction algébrique en multipliant ou en divisant ses deux termes par un même nombre.

Exemples : $\frac{8}{5} = \frac{8 \times (-2)}{5 \times (-2)} = \frac{-16}{-10} = +\frac{16}{10}$,

$$\frac{-24}{18} = \frac{-24 : (-3)}{18 : (-3)} = \frac{+8}{-6} = -\frac{8}{6}.$$

On peut donc simplifier une fraction en divisant son numérateur et son dénominateur par un ou plusieurs de leurs diviseurs communs.

$$\frac{36}{-48} = \frac{36 : 3}{-48 : 3} = \frac{12}{-16} = \frac{12 : 4}{-16 : 4} = -\frac{3}{4}.$$

On peut aussi en multipliant leurs termes par des facteurs convenablement choisis *réduire plusieurs fractions au même dénominateur.*

23. OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS ALGÉBRIQUES.

Les fractions algébriques sont soumises aux mêmes règles que les fractions arithmétiques, en tenant compte de la règle des signes.

Exemples : $\left(-\frac{3}{7}\right)+\frac{5}{14}+\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{-30}{70}+\frac{25}{70}-\frac{56}{70}$

$$=\frac{-30+25-56}{70}=-\frac{61}{70}.$$

$$\frac{13}{45}-\left(-\frac{7}{15}\right)=\frac{13}{45}+\frac{21}{45}=\frac{13+21}{45}=\frac{34}{45}.$$

$$-\frac{5}{7}\times\frac{2}{3}=-\frac{10}{21};\quad -\frac{8}{11}\times-\frac{5}{9}=\frac{40}{99}$$

$$-\frac{7}{15}:-\frac{3}{4}=-\frac{7}{15}\times-\frac{4}{3}=\frac{28}{45}.$$

§ IV. PUISSANCES DES NOMBRES ALGÉBRIQUES.

24. DÉFINITION. — ***On appelle*** puissance m^e ***d'un nombre algébrique a*** (*m étant un nombre entier et positif*) ***le produit de m facteurs égaux à a.*** La puissance ainsi formée se représente par le symbole a^m. Le nombre m, qui indique combien on prend de facteurs égaux à a pour former le produit, s'appelle l'exposant de la puissance.

Ainsi : $a^2 = a.a$; $a^3 = a.a.a$.

a^2 s'énonce *a puissance deux* ou, simplement, *a deux*.
a^3 — *a puissance trois* ou — *a trois*.
a^m — *a puissance m* ou — *a m*.

Si a est positif, la puissance m^e de a est toujours positive.

Si a est négatif, la puissance m^e de a est positive ou négative suivant que m est pair ou impair.

Exemples :

$$(+3)^2 = 9\,;\quad (+2)^3 = 8\,;\quad (-4)^4 = 256\,;\quad (-4)^3 = -64.$$

$$(-1)^m = +1 \quad \text{si } m \text{ est pair ;}$$

$$(-1)^m = -1 \quad \text{si } m \text{ est impair.}$$

25. PROPRIÉTÉS. — *Pour élever un produit de facteurs à une puissance, il suffit d'élever chaque facteur à cette puissance.*

Ainsi : $(a.b.c)^m = a^m b^m c^m$.

En effet, par définition,

$$(abc)^m = (abc)\,(abc)\,(abc)...\,(abc) = a.a.a...\,b.b.b...\,c.c.c...$$

Comme chacun de ces groupes renferme m facteurs :

$$(abc)^m = a^m.b^m.c^m.$$

Pour effectuer le produit de plusieurs puissances d'un même nombre, il suffit de faire la somme des exposants.

Ainsi : $a^m a^n a^p = a^{m+n+p}$.

En effet, $a^m a^n a^p = (a.a.a...)\,(a.a.a...)\,(a.a.a...)$.

La première parenthèse contient m facteurs égaux à a, la deuxième, n, et la troisième p ; le second membre est donc un produit de $m+n+p$ facteurs égaux à a : il est égal à a^{m+n+p}.

3° *Pour élever une puissance d'un nombre à une autre puissance, il suffit de faire le produit des exposants.*

Ainsi : $(a^n)^p = a^{np}$.

En effet, $(a^n)^p = a^n.a^n.a^n... = a^{n+n+n...} = a^{np}$.

4° *Pour élever une fraction à une puissance, il suffit d'élever ses deux termes à cette puissance.*

Ainsi : $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

En effet, $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times...\times\frac{a}{b}=\frac{a^m}{b^m}$.

26. QUOTIENT DE DEUX PUISSANCES D'UN MÊME NOMBRE.

1° *Si l'exposant du numérateur est plus grand que l'exposant du dénominateur, le quotient est égal à une puissance de ce nombre ayant pour exposant l'excès de l'exposant du numérateur sur celui du dénominateur ;*

2° *Si les exposants du numérateur et du dénominateur sont égaux, le quotient est égal à l'unité.*

3° *Si l'exposant du numérateur est plus petit que l'exposant du dénominateur, le quotient est égal à l'inverse d'une puissance de ce nombre, ayant pour exposant l'excès du dénominateur sur celui du numérateur.*

Soit $\frac{a^m}{a^n}$ le quotient de deux puissances du nombre a.

1° $m > n$: comme m et n sont entiers et positifs, on peut poser $m = n + p$.

Alors $a^m = a^{n+p} = a^n.a^p$,

a^p est donc le quotient de a^m par a^n

et $$\frac{a^m}{a^n} = a^p = a^{m-n}.$$

2° $m = n$: on a $a^m = a^n$, et le quotient $\frac{a^m}{a^n} = 1$.

En appliquant la règle précédente, on trouverait $a^{m-n} = a^0$. *On convient de dire que le symbole a^0 représente l'unité.*

3° $m < n$: comme m et n sont entiers, on peut poser :

$$m = n - p, \quad \text{d'où} \quad n = m + p.$$

Alors $$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^p} = \frac{1}{a^p} = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

§ V. *RADICAUX ARITHMÉTIQUES ET RADICAUX ALGÉBRIQUES.*

27. DÉFINITIONS. — ***Étant donné un nombre positif A, sa racine carrée arithmétique est un autre nombre a qui élevé au carré reproduit A.***

On a donc : $a^2 = A$.

Elle se note : $a = \sqrt{A}$

et s'énonce *racine carrée* ou simplement *racine* de A.

On appelle de même racine m^e d'un nombre positif A un autre nombre b qui élevé à la puissance m reproduit A.

On a donc : $b^m = A$.

la racine m^e se note : $b = \sqrt[m]{A}$.
m est l'indice du radical.

Il résulte de ces définitions que :

$$(\sqrt{A})^2 = A; \quad (\sqrt[m]{A})^m = A.$$

Si l'on forme la liste des carrés des nombres entiers, on voit que certains nombres, 7 par exemple, ne figurent pas dans cette liste.

D'autre part, on démontre que le carré d'une fraction irréductible ne peut être un nombre entier.

Il n'existe donc aucun nombre entier ou fractionnaire dont le carré soit égal à 7. Le symbole $\sqrt{7}$ n'a donc de sens que si l'on introduit une nouvelle catégorie de nombres distincts des nombres entiers et des nombres fractionnaires et que l'on appelle nombres **irrationnels** ou **incommensurables.**

Les nombres entiers et les nombres fractionnaires, par opposition sont dits rationnels.

28. PROPRIÉTÉS DES RACINES. — 1° *Si deux nombres positifs ont leurs racines carrées égales, ils sont égaux.*

2° *Le produit de deux racines carrées est égal à la racine carrée*

du produit. Cela résulte de ce que la puissance d'un produit est égale au produit des puissances de chacun de ses facteurs.

ainsi : $\sqrt{7} \times \sqrt{5} = \sqrt{35}$ car $(\sqrt{7})^2 \times (\sqrt{5})^2 = (\sqrt{35})^2$.

2° *De même, le quotient de deux racines carrées est égal à la racine carrée du quotient.*

Ainsi : $\sqrt{18} : \sqrt{6} = \sqrt{\frac{18}{6}} = \sqrt{3}$; $\quad \sqrt{\frac{27}{2}} : \sqrt{\frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{135}{8}}$.

Ces propriétés s'étendent sans difficultés aux racines d'indices quelconques.

3° *Pour élever une racine carrée arithmétique à une puissance, il suffit d'élever à cette puissance la quantité placée sous le radical.*

Cela revient en effet à multiplier entre eux plusieurs radicaux égaux.

Ainsi : $(\sqrt{5})^3 = \sqrt{125}$; $\quad \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^5 = \sqrt{\frac{32}{243}}$.

4° *On peut faire sortir d'un radical les facteurs carrés parfaits.* Ainsi :

$$\sqrt{288} = \sqrt{144 \times 2} = 12\sqrt{2}; \quad \sqrt{\frac{27}{125}} = \sqrt{\frac{9}{25} \times \frac{3}{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

On peut introduire un facteur sous le radical à condition de l'élever au carré.

Ainsi : $7\sqrt{2} = \sqrt{49 \times 2} = \sqrt{98}$; $\quad 3\sqrt{\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{9}{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

29. RACINE CARRÉE ALGÉBRIQUE D'UN NOMBRE POSITIF A.

On appelle racine carrée algébrique d'un nombre positif A, tout nombre a qui élevé au carré reproduit A.

Or on voit tout de suite qu'il existe deux nombres tels que leurs carrés soient égaux à 16, par exemple, $+4$ et -4. Ces deux nombres sont des racines algébriques de 16. *Un nombre positif A admet donc deux racines carrées algébriques ayant toutes deux pour valeur absolue la racine carrée arithmétique de A et de signes contraires.*

On les note : $+\sqrt{A}$ et $-\sqrt{A}$.

Un nombre négatif n'a pas de racine carrée.

Remarque importante. — *Le symbole $\sqrt{A}$ désigne la racine carrée arithmétique de A et par conséquent un nombre essentiellement positif.*

Si $a^2 = A$ et si a est négatif, on devra écrire :

$$a = -\sqrt{A}.$$

On étend cette propriété aux racines d'indice pair. Les puissances paires de tout nombre algébrique étant positives, un nombre positif quelconque admet deux racines d'indice pair $m = 2p$, égales en valeur absolue mais de signes contraires.

$$+\sqrt[2p]{A} \quad \text{et} \quad -\sqrt[2p]{A}.$$

Les puissances impaires d'un nombre algébrique étant de même signe que ce nombre, il en résulte *qu'un nombre algébrique admet une seule racine d'ordre impair* dont la valeur absolue est la racine arithmétique de même indice de sa valeur absolue et dont le signe est celui du nombre proposé.

$$\sqrt[3]{-27} = -3\,; \quad \sqrt[5]{-\frac{32}{243}} = -\frac{2}{3}.$$

MESURES ALGÉBRIQUES DES VECTEURS

1. Sur un axe $x'x$ placer les points A, B, C, D, E, F de manière que $\overline{AB} = +20$ mm, $\overline{BC} = -12$ mm, $\overline{CD} = +35$ mm, $\overline{DE} = -5$ mm, $\overline{EF} = +27$ mm. Exprimer ensuite les mesures algébriques des segments AD, BF, CA, DB.

2. Sur un axe orienté $x'x$, les abscisses des points A, B, C, D et E sont, respectivement : $\overline{OA} = +15$, $\overline{OB} = -16$, $\overline{OC} = +35$, $\overline{OD} = +40$, $\overline{OE} = -23$. Trouver :

1° Les mesures algébriques des segments BA, CD, EB, DE.

2° Les abscisses des milieux de ces segments.

3. A, B, C, D étant quatre points d'un axe tels que $\overline{AB} = -8$, $\overline{BC} = 12$, $\overline{CD} = -6$, calculer les abscisses de ces points en prenant successivement chacun d'eux comme origine.

4. Étant donnés, sur un axe $x'Ox$, quatre points A, B, C, D ayant respectivement pour abscisses $-\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, 2$, calculer la valeur numérique de l'expression :

$$\overline{CD} + \overline{BD} - \overline{CB} + \overline{BA}.$$

5. O, A, B, C, étant quatre points d'un axe tels que $\overline{OA} = -5$, $\overline{OB} = +3$, $\overline{OC} = -2$, calculer la valeur numérique de l'expression :

$$\overline{OA}^2.\overline{BC} + \overline{OB}^2.\overline{CA} + \overline{OC}^2.\overline{AB} + \overline{AB}.\overline{BC}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}).$$

6. On donne sur un axe orienté 3 points A, B, C, tels que $\overline{AB} = -9$, $\overline{BC} = 16$, où faut-il placer l'origine O pour que l'on ait :

$$\overline{OA} + 3\overline{OB} + 5\overline{OC} = 0.$$

7. Sur un axe $x'x$, on prend 3 points A, B et C ayant respectivement

pour abscisses -12 et -4 et $+30$. Calculer les abscisses des milieux des segments $\overline{A'B'}$ et $\overline{B'C'}$, les points A', B', C' étant respectivement les symétriques des points A, B, C par rapport à l'origine O.

8. On considère 3 points A, B, C, portés sur un axe orienté $x'Ox$, et les symétriques A', B', C' de ces trois par rapport au milieu I du segment OA. Déterminer les abscisses de A', B', C' sachant que :

$$\overline{OA} = -12, \quad \overline{OB} = 15, \quad \overline{OC} = -2.$$

9. Sur un axe dirigé $x'x$, les points A, B, C, D et O sont placés de telle manière que le point O soit le milieu de AB et que $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ (division harmonique). Prouver que :

$$1^\circ\ \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}\,; \quad 2^\circ\ \overline{OC}.\overline{OD} = \overline{OA}^2\,; \quad 3^\circ\ \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{2}{\overline{AB}}.$$

10. Les quatre points A, B, C et O étant distribués d'une manière quelconque sur un axe orienté $x'x$, vérifier que l'on a :

$$\frac{\overline{OA}^2}{\overline{AB}.\overline{AC}} + \frac{\overline{OB}^2}{\overline{BA}.\overline{BC}} + \frac{\overline{OC}^2}{\overline{CA}.\overline{CB}} = 1.$$

11. Étant donné un triangle ABC, rectangle en A, démontrer que la hauteur AH issue du sommet A satisfait à la relation

$$\overline{AH}^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}.$$

12. On donne un cercle de centre O et de rayon R, ainsi qu'un point quelconque A de son plan tel que OA $= d$; démontrer que toute droite passant par A et coupant le cercle en M et N donne la relation :

$$\overline{AM}.\overline{AN} = \overline{OA}^2 - R^2 = d^2 - R^2.$$

Étudier le signe du produit $\overline{AM}.\overline{AN}$ suivant la position du point A.

13. Étant donné un triangle quelconque ABC, démontrer que les bissectrices des angles intérieur et extérieur en A déterminent sur le troisième côté BC deux points M et N tels que soit vérifiée la relation :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}.$$

CHAPITRE II

EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES

§ I. DÉFINITIONS.

30. DÉFINITIONS. — Nous avons déjà vu que pour donner plus de généralité à certaines expressions, il pouvait être utile de remplacer certains nombres par des lettres. Ainsi, dans le calcul des intérêts produits par un capital, on désignera le capital placé par A, l'intérêt rapporté par 1 franc pendant un an par r ; l'intérêt obtenu sera alors représenté par Ar ; il suffira dans chaque cas particulier de remplacer A et r par leurs valeurs pour avoir l'intérêt annuel.

On appellera expression algébrique un ensemble de nombres dont certains sont représentés par des lettres, et sur lesquels on devra effectuer des opérations indiquées.

Exemple : $3a^2bc$; $ax^2 + bx + c$; $\dfrac{ax + b}{a'x + b'}$.

Un monôme est une expression algébrique dans laquelle les opérations à effectuer sont uniquement des multiplications et des élévations de puissances.

Exemple : $3a^2b^5x^2$.

Un polynôme est la somme algébrique de plusieurs monômes.

Exemple : $2ab^2x + 4a^3b^3x - 5ac^3$.

Un **binôme** est un polynôme formé de deux termes.

Exemple : $4ab^2x - 5ac^3y$.

Un **trinôme** est un polynôme formé de trois termes.

Exemple : $ax^2 + bx + c$.

Un polynôme est dit entier par rapport à une lettre si cette lettre ne figure pas au dénominateur de l'expression. Les exemples donnés ci-dessus sont des polynômes entiers par rapport à toutes les lettres.

L'expression $\dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{5}{6}x - 7\dfrac{a^2}{b}$

est un polynôme entier par rapport aux lettres x et a mais non par rapport à la lettre b.

Si l'expression algébrique ne contient pas de radical portant sur une lettre, on dit qu'elle est **rationnelle** par rapport à cette lettre ; dans le cas contraire, on dit qu'elle est **irrationnelle**.

Exemples : $\dfrac{4a^2x^2 - 5ax + 3a^2}{8ax + 2a}$ est une expression rationnelle en x et a.

$3a\sqrt{x} - 2x\sqrt{a} + \dfrac{1}{3}x\sqrt{a}$ est une expression irrationnelle en x et a.

$2\sqrt{a}\,x - 3x^2$ est rationnelle en x et irrationnelle en a.

31. DEGRÉ D'UNE EXPRESSION ALGÉBRIQUE. — ***1° Le degré d'un monôme est donné par la somme des exposants de ses facteurs littéraux.***

Exemple. — Le monôme $5ab^2x^3$ est du 6e degré.

2° Le degré d'un polynôme est donné par celui de son terme de degré le plus élevé.

Exemple. — Le polynôme $18ab + 72a^2b^2 - 64a^2 - 81b^2$ est du degré du terme : $72a^2b^2$, c'est-à-dire du 4e degré.

3° Le degré d'une expression irrationnelle s'obtient en divisant par l'indice du radical, le degré du polynôme placé sous le radical.

Exemple. — L'expression $\sqrt[3]{x^4 + x^2 + 1}$ a pour degré $\dfrac{4}{3}$.

Remarque. — *Le degré d'un polynôme est souvent pris par rapport à une seule lettre, généralement celle qui joue le rôle d'inconnue.*

Exemple. — L'expression $ax^2 + bx + c$ est un polynôme en x du second degré.

32. POLYNOME HOMOGÈNE. — ***Un polynôme est homogène lorsque tous ses termes sont du même degré.***

Exemple. — Le polynôme $2x^3 - 3x^2y + xy^2 - y^3$ est homogène et du 3e degré par rapport à x et à y.

Remarque. — Les expressions algébriques :

$$\frac{5x^2y - 7x^3 + y^3}{x + y} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{6x^4y - xy^4}}{4x^2 + y^2},$$

dont les numérateurs et les dénominateurs sont homogènes, sont dites homogènes ; **les degrés de telles expressions sont égaux à la différence des degrés du numérateur et du dénominateur**; dans les deux exemples ci-dessus, ces degrés sont respectivement 2 et $\dfrac{1}{2}$.

Polynôme ordonné. — *Ordonner un polynôme par rapport à une lettre donnée, c'est écrire ses termes dans un ordre tel que les exposants de cette lettre aillent constamment en diminuant ou en augmentant d'un terme au suivant.*

Ainsi le polynôme $4a^5 - 3a^4b - 2a^3b^2 + 8a^2b^3 + ab^4 - b^5$, est ordonné à la fois par rapport aux puissances décroissantes de a et aux puissances croissantes de b.

Coefficients. — *Dans un terme algébrique, on nomme coefficient numérique, le facteur arithmétique de ce terme.*

Dans un terme qui renferme une grandeur inconnue, on appelle coefficient, le produit des facteurs connus, ou supposés tels.

Exemples. — Dans le terme : $\frac{4}{3}a^2b$, le facteur $\frac{4}{3}$ est le coefficient numérique, tandis que dans : $ax^2 + bx$, x étant l'inconnue, a et b sont les coefficients de x^2 et de x.

Termes semblables. — *On appelle termes semblables des termes qui ne diffèrent que par leurs coefficients ou leurs signes.*

Ainsi : $7ax^2$, $-\frac{8}{5}ax^2$ et $ax^2\sqrt{2}$

sont des termes semblables.

Réduction des termes semblables. — Les termes semblables représentant des grandeurs de même nature, on peut les additionner ou les soustraire, en formant un terme unique qui ait pour coefficient la somme algébrique des coefficients.

Exemple : $5a^2b - 7a^2b - 4a^2b + a^2b = -5a^2b$.

33. VALEUR NUMÉRIQUE D'UNE EXPRESSION ALGÉBRIQUE. — ***On appelle valeur numérique d'une expression algébrique le résultat obtenu en remplaçant les lettres par des nombres donnés et en effectuant les opérations indiquées.***

La valeur numérique de $6a^2(3b + c)$, pour $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$, est :

$$6.2^2(3.1 + 3) = 24.6 = 144.$$

Il peut arriver qu'il soit impossible d'obtenir la valeur numérique d'une expression algébrique pour certaines valeurs données aux lettres ; on dit alors que, pour ces valeurs, l'expression **n'est pas définie.**

Exemples : Pour $x = 4$, le rapport $\frac{2x-1}{x-4}$ devient $\frac{7}{0}$ et n'a pas de sens. — De même pour $x = 2$, l'expression : $\sqrt{x^2-5}$ n'est pas définie, la quantité sous le radical étant négative.

Expressions algébriques équivalentes. — *Des expressions algébriques sont dites équivalentes, quand elles prennent des valeurs numériques égales pour tout système de valeurs attribuées aux lettres.*

Exemple : Les expressions $3a^2b - 5ab^2$ et $ab(3a - 5b)$ sont équivalentes.

Si l'on suppose : $a = 2$ et $b = 4$, par exemple, toutes deux sont égales à -112.

34. IDENTITÉ. — ***On appelle identité une égalité qui est vérifiée quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres.***

Une identité se représente par le signe $\equiv$ qu'on énonce : *identique à.*

Ainsi les égalités :

$$(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a - b)(a + b) \equiv a^2 - b^2,$$

sont des identités, car elles sont vérifiées pour toutes les valeurs numériques données à a et à b.

Remarque. — *Une expression algébrique est dite identiquement nulle lorsque sa valeur numérique est nulle quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres.*

Polynômes opposés. — *On dit que deux polynômes sont opposés, lorsqu'ils sont formés des mêmes termes affectés de signes différents.*

Exemple : $4a^3b^2 - 5a^2b^3 + 6ab^4$

et : $-4a^3b^2 + 5a^2b^3 - 6ab^4$.

CALCUL ALGÉBRIQUE

On étend immédiatement aux expressions algébriques, les définitions et les règles données pour les nombres algébriques.

§ *II. ADDITION ET SOUSTRACTION ALGÉBRIQUES.*

35. ADDITION ALGÉBRIQUE. — ***Pour additionner plusieurs monômes ou plusieurs polynômes, il suffit de les écrire les uns à la suite des autres en conservant leurs signes et en réduisant, s'il y a lieu, les termes semblables.***

Soit
$$P = 3b^2 + 7ab - 4a^2$$
$$Q = 2b^2 - 3ab + 5c^2.$$

On aura

$$P + Q = 3b^2 + 7ab - 4a^2 + 2b^2 - 3ab + 5c^2$$
$$= 5b^2 + 4ab - 4a^2 + 5c^2$$

36. SOUSTRACTION ALGÉBRIQUE. — ***Pour retrancher un polynôme d'un autre polynôme, on les écrit l'un à la suite de l'autre, en changeant de signe les termes du polynôme à soustraire. Cela revient à ajouter au premier polynôme le polynôme opposé au second.***

On réduit ensuite les termes semblables.

Exemple : $P = 4a^2bc + 7ab^2c - 4b^3 + 5c^3$
$Q = 3a^2bc - 4ab^2c - 8b^3 - 3c^2$
$P - Q = 4a^2bc + 7ab^2c - 4b^3 + 5c^3 - 3a^2bc$
$+ 4ab^2c + 8b^3 + 3c^2 = a^2bc + 11ab^2c + 4b^3 + 5c^3 + 3c^2.$

Remarques. — 1° Pour faciliter dans l'addition ou la soustraction la réduction des termes semblables, il est souvent intéressant d'écrire les polynômes les uns en dessous des autres en écrivant les termes semblables dans la même colonne.

2° Les règles données pour l'introduction ou la suppression des parenthèses dans les polynômes numériques s'appliquent aux expressions algébriques.

Exemple :

$$a^3 - b^3 - [2a^2b - 3c^2 - (2b^3 - 3a^2b - ab^2)]$$
$$= a^3 - b^3 - 2a^2b + 3c^2 + (2b^3 - 3a^2b - ab^2)$$
$$= a^3 - b^3 - 2a^2b + 3c^2 + 2b^3 - 3a^2b - ab^2$$
$$= a^3 - 5a^2b - ab^2 + b^3 + 3c^2.$$

§ III. *MULTIPLICATION ALGÉBRIQUE.*

37. MULTIPLICATION DE DEUX OU PLUSIEURS MONOMES. *Le produit de deux ou plusieurs monômes est un monôme ayant pour coefficient le produit des coefficients des facteurs et formé des différentes lettres de ces facteurs affectées d'un exposant égal à la somme de leurs exposants dans les différents facteurs du produit.*

Exemple : $4a^3b^2c \times (-5a^2b^3c^5d) \times 3ab^4d^2$
$= 4 \times -5 \times 3 \times a^{3+2+1}b^{2+3+4}c^{1+5}d^{1+2} = -60a^6b^9c^6d^3.$

38. MULTIPLICATION D'UN POLYNOME PAR UN MONOME.

Pour multiplier un polynôme par un monôme, on multiplie chaque terme du premier par le second et l'on ajoute les résultats.

Exemple : $(5a^2b^3 - 4ab^2c + 2a^2b^3d^2) \times -3a^2bc$
$= -15a^4b^4c + 12a^3b^3c^2 - 6a^4b^4cd^2.$

39. MULTIPLICATION D'UN POLYNOME PAR UN POLYNOME.

Pour multiplier un polynôme par un polynôme, on multiplie chaque terme du premier par chaque terme du second et on ajoute les résultats.

Il est très avantageux pour effectuer cette multiplication de la disposer comme une multiplication arithmétique en écrivant les deux facteurs de la multiplication, multiplicande et multiplicateur, l'un en dessous de l'autre et en disposant les divers produits partiels de manière que les termes semblables se trouvent dans les mêmes colonnes, ce qui en facilite la réduction.

Exemple :

$$\begin{array}{l} 3a^3 - 4a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ 2a^2 + ab - 3b^2 \\ \hline 6a^5 - 8a^4b + 4a^3b^2 - 2a^2b^3 \\ \quad + 3a^4b - 4a^3b^2 + 2a^2b^3 - ab^4 \\ \qquad - 9a^3b^2 + 12a^2b^3 - 6ab^4 + 3b^5 \\ \hline 6a^5 - 5a^4b - 9a^3b^2 + 12a^2b^3 - 7ab^4 + 3b^5. \end{array}$$

CARRÉ D'UN MONOME. — ***C'est le produit d'un monôme par un monôme identique.*** L'application de la règle de multiplication montre tout de suite que l'on obtiendra ce carré *en prenant le carré du coefficient et en doublant les exposants de chaque terme.*

Exemple : Le carré de $4a^2b^4c$ est égal à $16a^4b^8c^2$.
de $-3ab^2c^3$ est égal à $9a^2b^4c^6$.

40. IDENTITÉS REMARQUABLES. — Certains produits prennent des formes particulièrement intéressantes qu'il est utile de connaître pour effectuer facilement certains calculs.

Exemples :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2,$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$
$$(a^2 + ab + b^2)(a - b) = a^3 - b^3,$$
$$(a^2 - ab + b^2)(a + b) = a^3 + b^3.$$

Dans ces égalités les lettres a et b représentent des expressions algébriques quelconques que l'on pourra substituer à ces valeurs.

Exemple : $(3a - 5b)^2 = 9a^2 - 30ab + 25b^2$
$[(3x + y) - 2z]^2 = (3x + y)^2 - 4z(3x + y) + 4z^2$
$= 9x^2 + 6xy + y^2 - 12xz - 4yz + 4z^2$

$(4x + y)(4x - y) = 16x^2 - y^2$
$(2a + 5b)^3 = 8a^3 + 60a^2b + 150ab^2 + 125b^3$
$(4x^2 + 6xy + 9y^2)(2x - 3y) = 8x^3 - 27y^3.$

§ IV. DIVISION ALGÉBRIQUE. DIVISIBILITÉ.

41. DIVISION D'UN MONOME PAR UN MONOME. — ***Diviser un monôme A appelé dividende par un monôme B appelé diviseur, c'est en chercher un troisième Q appelé quotient qui, multiplié par B, donne A pour produit : $A \equiv BQ$.***

D'après cette définition, on voit immédiatement que A devra contenir toutes les lettres qui figurent dans B avec un exposant au moins égal. La division sous forme de monôme entier ne sera possible que dans ce cas. Le procédé suivi pour la multiplication permet d'énoncer la règle suivante pour la division :

Le quotient de deux monômes est un monôme qui a pour coefficient le quotient des coefficients du monôme dividende et du monôme diviseur, pour termes les lettres du dividende affectées d'un exposant égal à la différence des exposants de cette lettre dans le dividende et le diviseur. Si une lettre ne figure qu'au dividende, elle reparaît au quotient avec le même exposant.

Exemple : $12a^3b^2c^4d^5 : 4ab^2c^3 = 3a^2cd^5$

$21a^4b^5x^2y^2 : (-3a^2x^2y) = -7a^2b^5y.$

42. DIVISION D'UN POLYNOME PAR UN MONOME.

Pour effectuer le quotient d'un polynôme par un monôme, on divise chaque terme du premier par le second et l'on ajoute les résultats.

Cette division n'est évidemment possible que si la division de chacun des termes est possible.

Exemple : $12a^3b^4c^2 - 6a^2b^3c^4 + 14a^3b^5d^2 : 4a^2b^3$

$$= 3abc^2 - \frac{3}{2}c^4 + \frac{7}{2}ab^2d^2.$$

43. DIVISION DES POLYNOMES.

Étant donnés un polynôme A et un polynôme B, on appelle quotient de A par B, un polynôme Q tel que $A \equiv B.Q$. Dans la plupart des cas, ce polynôme n'existe pas. Par extension, on appellera quotient de A par B un polynôme Q tel que $A \equiv B.Q + R$, R étant un polynôme de degré inférieur au degré de B.

Nous nous bornerons à indiquer la règle pratique permettant de trouver ce polynôme, dans le cas où A et B sont deux polynômes ordonnés suivant les puissances décroissantes d'une même lettre. La justification de cette règle sortirait du cadre de cet ouvrage élémentaire.

Règle. — Pour diviser deux polynômes ordonnés suivant les puissances décroissantes d'une même lettre, on divise le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, ce qui donne le premier terme du quotient ; on multiplie le diviseur par ce premier terme, et on retranche le produit du dividende. On divise ensuite le premier terme du reste obtenu par le premier terme du diviseur, on obtient le second terme du quotient ; on multiplie le diviseur par ce terme, on retranche ce produit du premier reste et on obtient le second reste ; en divisant le premier terme de ce reste par le premier terme du diviseur, on obtiendra le troisième terme du quotient ; on continue ainsi jusqu'à ce qu'on trouve un reste nul, ou bien un reste de degré moindre que le diviseur.

Disposition de l'opération. — Si on applique cette règle aux deux polynômes suivants, on aura :

$$\begin{array}{lrrrrr|l}
 & 14x^5 & -27ax^4 & +21a^2x^3 & -3a^3x^2 & -4a^4x & 2x^2 - 3ax + 2a^2 \\ \cline{7-7}
 & -14x^5 & +21ax^4 & -14a^2x^3 & & & 7x^3 - 3ax^2 - a^2x \\ \cline{2-4}
\text{1}^{\text{er}}\text{ reste} & 0 & -6ax^4 & +7a^2x^3 & -3a^3x^2 & -4a^4x & \\
 & & +6ax^4 & -9a^2x^3 & +6a^3x^2 & & \\ \cline{2-5}
\text{2}^{\text{e}}\text{ reste} & & 0 & -2a^2x^3 & +3a^3x^2 & -4a^4x & \\
 & & & +2a^2x^3 & -3a^3x^2 & +2a^4x & \\ \cline{3-6}
\text{Reste} & & & & & -2a^4x. &
\end{array}$$

L'opération se dispose comme la division arithmétique ; le premier terme de chaque reste est toujours réduit ; le degré des restes successifs va en décroissant.

Le degré du quotient est la différence entre les degrés du dividende et du diviseur.

44. CAS PARTICULIER. — ***Le diviseur est un binôme de la forme $x - a$.***

Soit à effectuer le quotient de la division de $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ par $x - a$.

La division effectuée donne :

$$\begin{array}{l|l}
Ax^3 + Bx^2 + Cx + D & x - a \\ \hline
-Ax^3 + Aax^2 & Ax^2 + (Aa + B)x + (Aa^2 + Ba + C) \\
\quad + (Aa + B)x^2 & \\
\quad - (Aa + B)x^2 + (Aa^2 + Ba)x & \\
\qquad + (Aa^2 + Ba + C)x & \\
\qquad - (Aa^2 + Ba + C)x + (Aa^3 + Ba^2 + Ca) & \\
\qquad\qquad Aa^3 + Ba^2 + Ca + D. &
\end{array}$$

On voit que :

1° *Le premier terme du quotient s'obtient en abaissant d'une unité le degré de x dans le premier terme du dividende.*

2° *Le coefficient d'un terme de rang quelconque s'obtient en mul-*

tipliant par a le coefficient du terme précédent du quotient et en ajoutant le coefficient du terme de même rang du dividende.

3° *Le reste s'obtient en ajoutant le dernier terme du dividende au dernier terme du quotient multiplié par a.*

Remarques. — 1° Le dividende est supposé contenir toutes les puissances de x depuis celle marquée par le terme de degré le plus élevé ; s'il en était autrement, on compléterait en donnant zéro pour coefficient aux termes manquants.

2° Le reste est de la forme $Aa^3 + Ba^2 + Ca + D$. *C'est la valeur prise par le dividende quand on y remplace x par a.*

3° L'expression $x + a$ peut s'écrire $x - (-a)$. Le quotient par $x + a$ s'obtiendra donc de la même manière que précédemment, mais en remplaçant a par $-a$.

Exemple : Effectuer le quotient de
$x^5 - 8x^3 + 7x^2 - 3$ par $x - 2$.

Premier terme :	$x^5 : x =$	x^4
Deuxième terme :	$1 \times 2 + 0 = 2$	$2x^3$
	$2 \times 2 - 8 = -4$	$-4x^2$
	$-4 \times 2 + 7 = -1$	$-x$
	$-1 \times 2 + 0 = -2$	-2
Reste :	$-2 \times 2 - 3 = -7$	

D'où : $x^5 - 8x^3 + 7x^2 - 3 = (x-2)(x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x - 2) - 7$.

45. RESTE DE LA DIVISION D'UN POLYNOME ENTIER EN x PAR UN BINOME DE LA FORME x — a.

Soit $P(x)$ un polynôme entier en x divisé par $x - a$.
Si Q est le quotient et R le reste, on peut écrire :

$$P(x) = (x - a).Q(x) + R.$$

Or le reste R doit se réduire à une constante, car s'il contenait encore x on pourrait continuer la division.

Si l'on fait $x = a$ dans les deux termes de l'égalité, $x - a$ égale 0, et l'on aura :

$$R = P(a).$$

Le reste de la division d'un polynôme entier en x par un binôme de la forme x — a s'obtient en remplaçant x par a dans ce polynôme.

46. DIVISIBILITÉ PAR x — a.

Un polynôme A est divisible par un polynôme B lorsque la division de A par B se fait sans reste.

Pour qu'un polynôme entier en x soit divisible par x — a, il faut et il suffit, d'après ce qui précède, qu'il s'annule quand on y remplace x par a.

Ainsi : $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 6x + 4$ est divisible par $x - 2$, car, en y remplaçant x par 2, on obtient :

$$16 - 5.8 + 8.4 - 6.2 + 4 = 16 - 40 + 32 - 12 + 4 = 0.$$

De même *un polynôme entier en x sera divisible par x + a, s'il s'annule quand on y remplace x par — a.*

Ainsi : $x^3 + 5x^2 + 7x + 3$
est divisible par $x + 3$
car

$$(-3)^3 + 5(-3)^2 + 7(-3) + 3 = -27 + 45 - 21 + 3 = 0.$$

47. QUOTIENTS REMARQUABLES.

— En appliquant les règles précédentes concernant la recherche du reste et du quotient, on a que :

1° $x^m - a^m$ est toujours divisible par $x - a$, car $(a^m) - a^m = 0$ et

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} \ldots + a^{m-2}x + a^{m-1}.$$

2° $x^m - a^m$ est divisible par $(x + a)$ si m est pair, $m = 2p$
car $(-a)^m - a^m = a^m - a^m = 0$

Les signes du quotient sont alternativement positifs et négatifs.

$$\frac{x^m - a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} \ldots\ldots + a^{m-2}x - a^{m-1}.$$

3° $x^m + a^m$ n'est jamais divisible par $x - a$, car
$a^m + a^m = 2a^m \neq 0$.

4° $x^m + a^m$ est divisble par $x + a$ si m est impair, car alors
$(-a)^m + a^m = -a^m + a^m = 0$.

et

$$\frac{x^m + a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} \ldots - a^{m-2}x + a^{m-1}$$

avec les signes du quotient alternativement positifs et négatifs.

Applications. — 1° *Déterminer n pour que le polynôme*
$x^3 - 3x^2 + 5x + n$ *soit divisible par* $x - 2$.

Il faut et il suffit qu'en remplaçant x par 2, dans le polynôme, on obtienne zéro comme résultat, ce qui exige :

$$8 - 12 + 10 + n = 0$$

ou :

$$n + 6 = 0$$
$$n = -6.$$

Alors :

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 6 = (x - 2)(x^2 - x + 3).$$

2° *Déterminer* m *et* n *de manière que le polynôme*

$$x^4 - 3x^3 + 5x^2 + mx + n$$

soit divisible par $x^2 - x + 2$.

En effectuant la division, on trouve pour quotient $x^2 - 2x + 1$ et pour reste $(m + 5)x + n - 2$.

Il faut donc : $m + 5 = 0$ ou $m = -5$

et $n - 2 = 0$ $n = 2$.

§ V. DÉCOMPOSITION EN FACTEURS.

48. *Décomposer un polynôme en facteurs, c'est le mettre sous forme de produit non effectué.*

Pour cela, *on commence par mettre en évidence tous les facteurs communs aux divers termes du polynôme.*

Exemple : $5a^3b^2 + 10a^4b - 35a^2b^3 = 5a^2b[ab + 2a^2 - 7b^2]$.

2° Les termes du polynôme n'ayant plus de facteurs communs, on pourra :

soit ramener l'expression à une *forme de produits remarquables*, méthode des identités ;

soit *grouper les termes pour mettre en évidence des facteurs communs*, méthode des groupements ;

soit *utiliser les caractères de divisibilité précédemment étudiés*, méthode des diviseurs binômes.

49. MÉTHODE DES IDENTITÉS.

Elle consiste à utiliser l'analogie existant entre l'expression donnée et un produit remarquable dont les plus fréquents seront :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$
$$(a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2$$
$$(a - b)^2 + 4ab = (a + b)^2$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Exemples : 1° $a^2 + b^2 - c^2 - 2ab = a^2 - 2ab + b^2 - c^2$
$= (a - b)^2 - c^2$
$= (a - b + c)(a - b - c)$.

2° $(a^2 + b^2 + c^2 - d^2 - 2ab)^2 - 4c^2(a - b)^2$
$= [a^2 + b^2 + c^2 - d^2 - 2ab + 2c(a - b)]$
$[a^2 + b^2 + c^2 - d^2 - 2ab - 2c(a - b)]$
$= [(a - b)^2 + 2c(a - b) + c^2 - d^2][(a - b)^2 - 2c(a - b) + c^2 - d^2]$
$[(a - b + c)^2 - d^2][(a - b - c)^2 - d^2]$
$= (a - b + c - d)(a - b - c + d)(a - b - c + d)(a - b - c - d)$.

3° $a^4 + b^4$
$a^4 + b^4 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - 2a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - (ab\sqrt{2})^2$
$= (a^2 + ab\sqrt{2} + b^2)(a^2 - ab\sqrt{2} + b^2)$.

4° $a^4 + b^4 + a^2b^2$
$= a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2$
$= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$.

50. MÉTHODE PAR GROUPEMENTS.

Elle consiste à réunir les termes de l'expression algébrique en groupements convenablement choisis, de manière à faire apparaître dans chaque groupe un facteur commun, que l'on peut mettre en évidence.

Exemples : Décomposer en facteurs

1° $x^2 + ax - bx - ab$
$= x(x + a) - b(x + a) = (x + a)(x - b)$.

2° $ac(a + c) + ab(a - b) - bc(b + c)$
$= a^2c + ac^2 + a^2b - ab^2 - b^2c - bc^2$
$= a^2(b + c) - a(b^2 - c^2) - bc(b + c)$
$= (b + c)[a^2 - a(b - c) - bc] = (b + c)[a(a - b) + c(a - b)]$
$= (b + c)(a + c)(a - b)$.

3° $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$
$= a^3b - a^3c + b^3c - b^3a + c^3(a - b)$
$= ab(a^2 - b^2) - c(a^3 - b^3) + c^3(a - b)$
$= (a - b)[ab(a + b) - c(a^2 + ab + b^2) + c^3]$
$= (a - b)[a^2b + ab^2 - a^2c - abc - b^2c + c^3]$
$= (a - b)[a^2(b - c) + ab(b - c) - c(b^2 - c^2)]$
$= (a - b)(b - c)[a^2 + ab - bc - c^2]$
$= (a - b)(b - c)[a^2 - c^2 + b(a - c)]$
$= (a - b)(b - c)(a - c)[a + b + c]$.

51. MÉTHODE DES DIVISEURS BINOMES.

Elle utilise les propriétés de divisibilité des polynômes. On ordonne le polynôme suivant les puissances décroissantes de x et l'on met en facteur le coefficient du premier terme (terme de degré le plus élevé), puis on cherche les diviseurs du terme constant ainsi obtenu.

On remplace successivement x *par les diviseurs ; si l'expression s'annule pour l'un de ces nombres* a, *le polynôme est divisible par* x — a. On effectue la division et l'on poursuit les essais jusqu'à épuisement des diviseurs.

Exemple : Décomposer en facteurs : 1° $x^2 - x - 2$.
Les diviseurs du terme constant -2 sont 1 et -1, $+2$ et -2.
On voit que $f(-1) = 0$, et $f(2) = 0$, le polynôme est divisible par $x + 1$ et par $x - 2$.

On obtient $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$.

2° $6x^3 - 5x^2 - 29x + 10$

On a $$P(x) = 6\left[x^3 - \frac{5}{6}x^2 - \frac{29}{6}x + \frac{10}{6}\right].$$

Les diviseurs de $\frac{10}{6}$ sont $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{5}{6}$;

or $$f(-2) = 0 \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \quad f\left(\frac{5}{2}\right) = 0 \ ;$$

d'où $P(x) = 6(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right) = (x+2)(3x-1)(2x-5).$

Remarque. — La résolution de l'équation de second degré fournira par la suite une méthode simple de mise en facteurs.

§ VI. FRACTIONS ALGÉBRIQUES RATIONNELLES. RAPPORTS ALGÉBRIQUES.

On appelle fraction algébrique rationnelle le quotient de deux polynômes (ou monômes) entiers.

Exemple : $\frac{a^2-ab}{a^2+b^2}$, $\frac{x^2-3ax+a^2}{2x+a}$, $\frac{7a^2b^2}{x^2+a^2y}$.

On étend aux fractions algébriques les règles du calcul des fractions arithmétiques.

En particulier, on ne change pas la valeur d'une fraction algébrique en multipliant ou en divisant ses deux termes par un même nombre ou par une même expression algébrique.

Ainsi : $\frac{7a^3b^2c}{21a^2b}$, $\frac{ab^2c}{3b}$, $\frac{abc}{3}$, $\frac{abc(x+y)}{3(x+y)}$

sont des fractions équivalentes.

52. SIMPLIFICATION DES FRACTIONS. — ***Simplifier une fraction algébrique, c'est la remplacer par une fraction équivalente dont les termes sont de degré moindre.***

Pour cela, 1° *on décompose en facteurs le numérateur et le dénominateur ;*

2° *on divise les deux termes de la fraction par leurs diviseurs communs.*

Exemple : $$\frac{ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)}$$
$$= \frac{ax(bx+ay)+by(ay+bx)}{ax(bx+ay)-by(ay+bx)} = \frac{(ax+by)(bx+ay)}{(ax-by)(bx+ay)} = \frac{ax+by}{ax-by}.$$

53. RÉDUCTION DE PLUSIEURS FRACTIONS AU MÊME DÉNOMINATEUR.

Pour réduire plusieurs fractions, au même dénominateur :

1° *on simplifie les fractions données ;*

2° *on forme le dénominateur commun égal au produit des différents facteurs des dénominateurs des fractions affectés de leur plus fort exposant ;*

3° *on multiplie le numérateur de chaque fraction par le quotient du dénominateur commun et de son dénominateur, et l'on donne à la fraction pour dénominateur, le dénominateur commun.*

Exemple : $$\frac{3a}{a^2-4ax+4x^2}, \quad \frac{3x+a}{a^2-4x^2}, \quad \frac{5ax}{a^3+2a^2x+ax^2}$$

peuvent s'écrire : $$\frac{3a}{(a-2x)^2}, \quad \frac{3x+a}{(a-2x)(a+2x)}, \quad \frac{5x}{(a+x)^2}.$$

Le dénominateur commun sera : $(a-2x)^2(a+2x)(a+x)^2$
et les fractions seront :
$$\frac{3a(a+2x)(a+x)^2}{(a-2x)^2(a+2x)(a+x)^2}, \quad \frac{(3x+a)(a-2x)(a+x)^2}{(a-2x)^2(a+2x)(a+x)^2},$$
$$\frac{5x(a-2x)^2(a+2x)}{(a-2x)^2(a+2x)(a+x)^2}.$$

54. ADDITION ET SOUSTRACTION DES FRACTIONS.

Pour additionner ou soustraire des fractions algébriques :

1° *on les réduit au même dénominateur ;*

2° *on forme une fraction ayant pour numérateur, le polynôme formé par les numérateurs des fractions ainsi réduites affectés des signes convenables et pour dénominateur le dénominateur commun ; on réduit les termes semblables et l'on simplifie s'il y a lieu, la fraction obtenue* [1].

Exemple : Effectuer
$$\frac{x+1}{2x-2} + \frac{x-1}{2x+2} - \frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{2}{x^4-1}.$$

On peut écrire :
$$\frac{x+1}{2(x-1)} + \frac{x-1}{2(x+1)} - \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{(x^2+1)(x-1)(x+1)}.$$

Le dénominateur commun sera :
$$2(x-1)(x+1)(x^2+1) = 2(x^4-1)$$
et l'on aura :
$$\frac{x+1)(x+1)(x^2+1)+(x-1)(x-1)(x^2+1)-2(x^2+1)(x^2+1)+4}{2(x^4-1)}$$
$$= \frac{(x^2+1)[(x+1)^2+(x-1)^2-2(x^2+1)]+4}{2(x^4-1)} = \frac{2}{x^4-1}.$$

55. MULTIPLICATION DES FRACTIONS ALGÉBRIQUES.

Pour multiplier plusieurs fractions algébriques, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux et l'on simplifie les fractions ainsi obtenues.

Il sera souvent avantageux de mettre en facteurs les termes des différentes fractions, ce qui facilitera la simplification.

1. Des additions partielles simplifient souvent le calcul. Dans l'exemple ci-dessous, l'addition des deux premiers termes donne un résultat qui s'annule avec le troisième. Il reste le quatrième.

Exemple : Effectuer

$$\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}\right)\cdot\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}+1\right)\frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}=\frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{x^2-y^2}=\frac{2(x^2+y^2)}{x^2-y^2}$$

$$\frac{x^2+y^2}{2xy}+1=\frac{(x+y)^2}{2xy}.$$

D'où le produit demandé égale :

$$\frac{2(x^2+y^2)(x+y)^2xy}{(x^2-y^2)2xy\cdot(x^2+y^2)}=\frac{x+y}{x-y}.$$

56. DIVISION DES FRACTIONS ALGÉBRIQUES.

Pour diviser deux fractions algébriques, on multiplie la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.

Il y aura avantage comme pour la multiplication, à décomposer les termes en facteurs et à simplifier la fraction obtenue.

Exemple :

$$\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right):\left(\frac{1+x}{1-x}-1\right)\left(1-\frac{1}{1+x}\right).$$

Le dividende s'écrit :

$$\frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{1-x^2}=\frac{4x}{1-x^2}.$$

Le diviseur égale :

$$\left(\frac{1+x}{1-x}-1\right)\left(1-\frac{1}{1+x}\right)=\frac{2x}{1-x}\cdot\frac{x}{1+x}=\frac{2x^2}{1-x^2}.$$

Le quotient sera : $\dfrac{4x}{1-x^2}\cdot\dfrac{1-x^2}{2x^2}=\dfrac{2}{x}.$

§ VII. RAPPORTS ET PROPORTIONS.

57. DÉFINITIONS. — ***On appelle rapport de deux expressions algébriques le quotient de ces deux expressions.***

Une proportion est l'égalité de deux rapports.

Exemple : $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d},\qquad \dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{x+y}{x-y}.$

Dans une proportion, le premier et le quatrième termes sont appelés **extrêmes**, le second et le troisième : **moyens.**

Si les quatre termes de la proportion sont différents, chaque terme est dit : **quatrième proportionnelle** par rapport aux trois autres.

Si les deux termes moyens sont égaux, on les appelle **moyenne proportionnelle** des deux autres qui sont dits **troisième proportionnelle ;**

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}.$$

58. THÉORÈME FONDAMENTAL. — ***Dans toute proportion, le produit des termes extrêmes est égal au produit des termes moyens.***

Soit la proportion : $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}.$

En réduisant les deux fractions au même dénominateur bd, on a :

$$\frac{ad}{bd}=\frac{cb}{bd}.$$

Ces deux fractions ayant même dénominateur, devront avoir des numérateurs égaux et l'on aura :

$$ad=bc.$$

Réciproquement, *si quatre nombres ont leurs produits deux à deux égaux ils forment une proportion.*

L'égalité : $ad=bc$
entraîne celle des fractions

$$\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$$

et après simplification : $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}.$

59. THÉORÈME. — ***Dans toute proportion, la somme ou la différence des deux premiers termes est au second, comme la somme ou la différence des deux derniers est au quatrième.***

La proportion $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$

permet d'écrire :

$$\frac{a}{b}\pm1=\frac{c}{d}\pm1$$

ou

$$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}.$$

Remarque. — On peut dans une proportion intervertir l'ordre des moyens ou celui des extrêmes, car l'égalité $ad=bc$ peut s'écrire :

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\quad\text{ou}\quad\frac{d}{b}=\frac{c}{a}\quad\text{ou}\quad\frac{d}{c}=\frac{b}{a}.$$

60. **THÉORÈME.** — ***Dans une suite de rapports égaux, si l'on additionne les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, on obtient un nouveau rapport égal aux précédents.***

Soit la suite de rapports égaux :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = q$$

on a : $a = bq, \quad c = dq, \quad e = fq.$

d'où : $a + c + e = (b + d + f)q$

et: $$\frac{a + c + e}{b + d + f} = q = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}.$$

§ VII. RACINES D'UNE EXPRESSION ALGÉBRIQUE.

61. ***On appelle racine carrée d'une expression algébrique, une autre expression qui élevée au carré, reproduit la première.***

Ainsi : $3a^2bc^3$ est la racine carrée de $9a^4b^2c^6$.

De la règle d'élévation au carré d'un monôme, on déduit immédiatement qu'un monôme ne peut être carré parfait que :

1° si son coefficient est positif et carré parfait ;

2° si les exposants de tous ses termes sont pairs.

Un monôme a deux racines opposées de signes contraires.

S'il est carré parfait on obtiendra cette racine en prenant la racine carrée algébrique du coefficient et en divisant par deux les exposants de tous ses termes.

Ainsi : $+ 3ab^2x$ et $- 3ab^2x$ sont les racines de $9a^2b^4x^2$.

On appelle **radicaux semblables**, des radicaux qui ne diffèrent que par le coefficient placé devant le radical mais ont les mêmes expressions algébriques placées sous le radical.

Exemple : $2ab\sqrt{x^2 - y^2}$ et $-3a^2\sqrt{x^2 - y^2}$.

On peut grouper ensemble des radicaux semblables en mettant en facteur le radical commun et entre parenthèses les coefficients de ces radicaux affectés du signe convenable et en réduisant, s'il y a lieu, les termes semblables dans cette parenthèse.

Exemple :

$$2a^2 . \sqrt{ab} - 3ab\sqrt{ab} + 5b^2\sqrt{ab} = (2a^2 - 3ab + 5b^2)\sqrt{ab}.$$

$$\sqrt{18a^3x^3} - \sqrt{8a^3b^2x} + \sqrt{2b^4a^3x^3} = 3ax\sqrt{2ax} - 2ab\sqrt{2ax} + b^2a\sqrt{2ax}$$
$$= (3ax - 2ab + ab^2)\sqrt{2ax}.$$

62. **EXPRESSIONS CONJUGUÉES.**

Deux binômes sont dits conjugués lorsqu'ils sont formés des mêmes termes séparés par des signes différents.

Ainsi : $a + \sqrt{b}$ et $a - \sqrt{b}$; $\sqrt{a} + \sqrt{b}, \sqrt{a} - \sqrt{b}$ sont des expressions conjuguées. Leur produit (somme, par différence), est égal au carré du premier moins le carré du second, il est donc rationnel.

Cette définition peut s'étendre à des expressions comprenant un nombre quelconque de termes. Deux expressions algébriques seront dites conjuguées par rapport à un radical si elles sont formées des mêmes termes avec des signes différents devant ce radical.

Ainsi : $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}$ sont conjuguées par rapport à $\sqrt{c}$.

Dans le produit de ces deux facteurs l'un par l'autre, le radical par rapport auquel elles sont conjuguées est remplacé par une quantité rationnelle.

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}) = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - c.$$

63. **APPLICATION.** — ***Rendre rationnel le dénominateur d'une fraction.***

Il peut être avantageux dans les calculs d'avoir des fractions à dénominateur rationnel. On transformera donc les fractions de façon à faire disparaître les radicaux du dénominateur.

1° *Le dénominateur est un monôme irrationnel.*

Il suffit alors de multiplier le numérateur et le dénominateur par une quantité telle qu'elle rende carré parfait la quantité placée sous le radical.

Exemple :

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2.2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}; \quad \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{20}} = \frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{100}} = \frac{5\sqrt{15}}{10} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

2° ***Le dénominateur est un binôme irrationnel.***

Il suffit de multiplier les deux termes de la fraction par la conjuguée du dénominateur. Celui-ci devient rationnel.

Exemple :

$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{3 + 2 + 2\sqrt{6}}{3 - 2} = 5 + 2\sqrt{6}.$$

$$\frac{3 + 2\sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} = \frac{(3 + 2\sqrt{2})(3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} = \frac{9 + 9\sqrt{2} + 4}{9 - 2} = \frac{13 + 9\sqrt{2}}{7}.$$

3° *Le dénominateur est formé d'un nombre quelconque de termes.*

On isole un radical et on multiplie les deux termes par la conjuguée du dénominateur prise par rapport à ce radical, on simplifie s'il y a lieu la fraction ainsi obtenue et on recommence l'opération par rapport à un nouveau radical et ainsi de suite jusqu'à ce que le dénominateur devienne rationnel.

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{2}+\sqrt{3})(2-\sqrt{2}-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{1-2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{(2-\sqrt{2})^2-3}=\frac{1-2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3-4\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(1-2\sqrt{2}-\sqrt{6})(3+4\sqrt{2})}{(3-4\sqrt{2})(3+4\sqrt{2})}=\frac{13+2\sqrt{2}+8\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{23}.$$

CALCUL ALGÉBRIQUE

Addition et soustraction

Effectuer les opérations suivantes :

14. On donne les polynômes suivants :

$$P = 4a^3 - 5a^2b + 7b^3,$$
$$P_1 = 2a^3 + 11a^2b - 8b^3,$$
$$P_2 = 4a^3 + 5a^2b - 8b^3 ;$$

calculer : 1° $P - P_1$; 2° $P + P_1 - P_2$.

15. On donne les quatre polynômes :

$$5a^2 - 3ab + b^2 - 3ac + 2bc + c^2,$$
$$2a^2 + 5ab - 3b^2 + 2ac - 4bc + 3c^2,$$
$$4a^2 - 7ab + 5b^2 - 4ac - 5bc + c^2,$$
$$2a^2 + 9ab - 8b^2 + 3ac + 3bc + 2c^2 ;$$

de la somme des deux premiers retrancher la somme des deux derniers

16. On donne les quatre polynômes :

$$6a^2 - 3ab + 2b^2 - 5ac + 6bc - 2c^2,$$
$$a^2 - ab + b^2 + ac - bc - c^2,$$
$$2a^2 + 3ab - 2b^2 - 3ac - 4bc - 5c^2,$$
$$3a^2 - 6ab + 3b^2 - 4ac + 10bc + 4c^2 ;$$

du premier retrancher la somme des trois derniers.

17. Même question pour les quatre polynômes :

$$9x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 - b^3x + b^4,$$
$$5x^4 + 3bx^3 - 5abx^2 - a^3x + b^4,$$
$$2x^4 - ax^3 + 7b^2x^2 - 2b^3x - a^4,$$
$$x^4 - 4ax^3 + 3a^2x^2 + a^2bx - 2a^2b^2.$$

Effectuer les opérations :

18. $44x+[48y-(6z+3y-7x)-4z]-[48y-8x+2z-(4x+y)]$.

19. $7a^3-(5a^2x+3ax^2-7x^3)-[8a^3-4a^2x-(-3ax^2-7x^3)]$,

20. $4a-5c-\{[6a-(4b+5)]-(4a-5b)\}$.

21. $7x-8y-\{8xy-[-3a-(3a+2y)]-(2xy-4y)\}$.

22. $(a^2x^2-6z^2)-\{-(a^2x^2+6z^2)-[(3a^2x^2-3z^2)+4a^2x^2]\}$.

23. $-4-\{-(5a^2b^2-3x^2)-[3a^2b^2-(5x^2+a^2b^2)+3x^2]+3x^2\}$.

24. $5x^2-\{2ab+[3ab+b^2-(4b^2-5ab)+4x^2]-x^2\}$.

Valeurs numériques

Trouver la valeur numérique des quantités suivantes :

27. 1° $(3a+4b)(4b-3a)-36a^2b$,
2° $(1+2a+3b)(1+2a-3b)-4a^2b$,

pour $a=\frac{1}{3}$ et $b=\frac{1}{2}$.

28. 1° $4a^2(a^2+b-c)-(b+c)(c-a^2-b)+(a+b)^2(c^2-b+a^2)$,
pour $a=-1$, $b=2$, $c=3$.

2° $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, pour $a=1$, $b=2$, $c=3$.

29. 1° $(x+y-z)^2+(x+y)^2(x-y+z)+(x-y)^2$,
pour $x=-1$, $y=-2$, $z=\frac{1}{2}$.

2° $4a^2[(a^2-b^2)^2-(a^2+2ab+b^2)^2]+(a-b-c)(a+b)$,
pour $a=1$, $b=2$, $c=3$.

30. 1° ax^2+bx+c, 2° $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, 3° $\frac{\sqrt{a^2+2b}\pm\sqrt{a^2-2b}}{2a}$,
pour $a=5$, $b=12$, $c=4$, $x=-2$.

31. Dans les trinômes suivants, de la forme ax^2+bx+c, calculer la valeur de la quantité b^2-4ac :

1° $2x^2-5x+12$,	3° $3x^2-8x+5$,
2° $2x^2-5x-12$,	4° $9x^2-24x+16$.

32. Un triangle a pour côtés $a=13$, $b=14$, $c=15$; calculer :

1° La surface S donnée par la formule

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)} ;$$

2° le rayon R du cercle circonscrit donné par la formule $R=\frac{abc}{4S}$;

3° à quoi se réduit la formule de la surface quand $a=b=c$?

33. Le volume d'un tronc de cône est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)\,;$$

celui d'une sphère est $V = \frac{4}{3}\pi h^3$. Si ces deux volumes sont égaux, calculer h, sachant que $R = 5$ et $r = 3$.

Multiplication

Effectuer les multiplications suivantes :

34. $(5a^2 + ab - 3b^2)(3a^2 - 2ab + b^2)$.

35. $(3a^5 - 2a^2b^3 + 9ab^4 - 8b^5)(4a^2 + 5ab - 6b^2)$.

36. $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$.

37. $(a^3 - a^2x + ax^2 - x^3)(a + x)(a - x)(a^3 + a^2x + ax^2 + x^3)$.

38. $(5a^4 + 2a^3b - 3a^2b^2 - 4ab^3 + 7b^4)(9a^2 - 6ab - 11b^2)$.

39. $(2a^2b - 3ab^2)^3$.

40. $(4x^2 - 3x + 2)(3x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x + 3)$.

41. $\left(\frac{5}{2}x^2 + 3ax - \frac{7}{3}a^2\right)\left(2x^2 - ax - \frac{a^2}{2}\right)$.

42. $\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}\right)$.

43. $\left(\frac{2}{5}ab^2 - \frac{3}{4}a^2b + \frac{1}{2}b^3\right)\left(\frac{2}{3}ab^2 - b^3 + \frac{4}{5}a^2b\right)$.

44. $(a + b - c - d)^2 - (c - d + a - b)^2$.

45. $(1 + 2b + 3a)^2 - (1 - 2b + 3a)^2$.

46. $[(x + 2y) + (3x - 2y)]^2 - [(x - 2y) - (3x + 2y)]^2$.

47. $(a + b - c)(a + b) + (a - b + c)(a + c) + (b + c - a)(b + c)$.

48. $(4x^2 - 12xy + 9y^2)(2x + 3y)(4x^2 + 12xy + 9y^2)(2x - 3y)$.

49. $3(x - y)^2(x + y) - 3(x + y)^2(x - y)$.

50. $(a - b)^3 + (a + b)^3 + 3(a^2 - b^2)(a - b) + 3(a + b)(a^2 - b^2)$.

51. $[x^2 + x(a + b) + (a^2 + b^2)][x^2 - x(a - b) + a^2 - b^2]$.

52. $(8a^3 - x^6)(8a^3 + x^6) - (2a - x^2)(2a + x^2)[2a(2a + x^2) + x^4]$
$[4a^2 - x^2(2a - x^2)]$.

53. $(x^ny + x^{n-1}y^2 + x^{n-2}y^3)(x - y) - (x^{n-1} + x^{n-2}y + y^{n-1})(xy^2 + x^2y)$.

54. $(a^n + b^m + c^r)(a + b + c) - [a^{n+1} + cb^m - (3bc^r - c^{r+1})]$.

55. $(x^n + y^m + z^r)^2 - (x^n - y^m - z^r)^2$.

Exercices sur la division

56. $(4a^7x^5 - 24a^6x^6 + 36a^5x^7) : 4a^2x^3$.

57. $(12x^4y^3 - 24x^3y^4 + 36x^2y^5) : 12x^2y^2$.

58. $15m^4n^3p^2 - 25m^3n^4p^3 + 30m^2n^2p^4) : (-5m^2n^2p^2)$.

59. $x^{m+2}y^n + 2x^{m+1}y^{n+1} + x^my^{n+2} : x^my^n$.

60. $(4x^3 + 4x^2 - 19x + 21) : (2x - 3)$.

61. $(a^5x^5 + y^5) : (ax + y)$.

62. $(81x^8 - 16y^8) : (3x^2 - 2y^2)$.

63. $(2a^4 - 13a^3b + 31a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4) : (2a^2 - 3ab + 4b^2)$.

64. $(14a^5 - 27a^4b + 21a^3b^2 - 3a^2b^3 - 2ab^4) : (2a^2 - 3ab + 2b^2)$.

65. $(6a^6b^3 - 13a^5b^4 + 28a^4b^5 - 23a^3b^6 + 20a^2b^7) :$
$: (2a^2b^2 - 3ab^3 + 4b^4)$.

66. $(6x^5 + 5x^4 - 25x^3 + 31x^2 - 13x + 2) : (2x^2 - 3x + 2)$.

67. $(5a^7b + 8a^6b^2 - 13a^5b^3 + 38a^4b^4 - 26a^3b^5 + 24a^2b^6) :$
$: (5a^2b - 2ab^2 + 6b^3)$.

68. $(a^5 - a^4b - 4a^3b^2 - a^3 + 4a^2b^3 + 3a^2b - a^2 - 2ab^2 - 2ab + 1) :$
$: (a^2 + 2ab - 1)$.

69. $(10a^4b - 21a^3b^2 - 56ab^5 - 3a^2b^4 - 10a^3b^3) : (8b^3 - 3ab^2 + 5a^2b)$.

70. $\left(x^4 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{11}{8}x^2 - \frac{1}{2}x\right) : \left(x^2 - \frac{1}{2}x\right)$.

71. $\left(x^4 - \frac{13}{6}x^3 + x^2 + \frac{4}{3}x - 2\right) : \left(\frac{4}{3}x - 2\right)$.

72. $(p^8x^4 - 81a^{12}) : (p^6x^3 - 3a^3p^4x^2 + 9a^6p^2x - 27a^9)$.

73. $(a^{2n} + 2a^nb^{2r} + b^{4r} - c^{2p}) : (a^n + b^{2r} + c^p)$.

74. $(x^{8n} - y^{8r}) : (x^{5n} - x^{4n}y^r + x^ny^{4r} - y^{5r})$.

75. $[2x^3 + 7x^2y - 9y^2(x + y)] : (2x - 3y)$.

76. $[c^2(2ab - a^2) - b^2(2ac + b^2) + a^2b^2 + c^4] : [b^2 + a(b + c) + c^2]$.

77. $[x^2(y + z) - y^2(x - z) + z^2(x - y) - xyz] : [x(y + z) - yz]$.

Division d'un polynôme par x — a.

Trouver le reste des divisions suivantes, sans effectuer le quotient:

78. $2x^3 - 3x^2 + 8x - 5$ par $x - 2$.

79. $x^3 - 2x^2 + 7x + 1$ par $x + 2$.

80. $2x^4 + 17x^3 - 68x^2 - 39$ par $2x + 1$.

81. $3x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5x - 2$ par $x + 1$.

Formerer en se servant de la règle donnée au n° 44, les quotients suivants :

82. $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ par $x - 1$.

83. $2x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 5x - 1$ par $x + 2$.

84. $5x^4 - 4ax^3 + 7a^2x^2 - 5a^3x + a^4$ par $x - 2a$.

85. $8x^4 - 5ax^3 + 9a^2x^2 - 5a^3x + a^4$ par $x + 2a$.

86. $32x^5 + 243$ par $2x + 3$.

87. $x^8 - y^8$ par $x^2 - y^2$

88. $x^9 + 27y^9$ par $x^3 + 3y^3$.

89. Déterminer m de telle sorte que :

1° $4x^2 - 6x + m$ soit divisible par $x - 3$,

2° $x^4 - 5x^2 + 4x - m$ soit divisible par $2x + 1$.

90. Déterminer m de telle sorte que :

1° $2x^4 + 4ax^3 - 5a^2x^2 - 3a^3x + ma^4$,

2° $x^4 + ma^2x^2 - 5a^3x + a^4$,

soient divisibles par $x - a$.

91. Déterminer m et n de telle sorte que $x^4 - 3x^3 + mx + n$ soit divisible par $x^2 - 2x + 4$.

92. Quelle valeur faut-il donner à m pour que :

1° $x^4 + ma^2x^2 + a^4$,

2° $x^3 - max^2 + ma^2x - a^3$,

soient divisibles par $x^2 - ax + a^2$?

93. Étant donnés les polynômes $x^4 + px^2 + q$ et $x^2 + 2x + 5$, déterminer p et q de telle sorte que le premier soit divisible par le second.

94. Déterminer m, n, p de telle sorte que le polynôme
$$x^5 - 2x^4 - 6x^3 + mx^2 + nx + p$$
soit divisible par $(x - 3)(x + 1)(x - 1)$.

En général, trouver les conditions pour que le polynôme
$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
soit divisible par $x^2 - \alpha^2$.

95. Comment doit-on choisir la valeur numérique du coefficient m pour que la division de $x^3 + y^3 + z^3 + mxyz$ par $x + y + z$ s'effectue exactement ? Donner le quotient de cette division.

96. On demande de diviser $x^4 + 1$ par $x^2 + px + q$ où p et q sont des nombres donnés. Quelles valeurs faut-il attribuer à p et q pour que la divison se fasse sans reste ?

97. Étant donné $x^4 + px^2 + q$, déterminer p et q de telle manière que le polynôme soit divisible par $x^2 - 6x + 5$.

98. Un polynôme entier en x, divisé séparément par $x - 1$ et $x - 2$ donne pour restes respectifs 6 et 18. Quel reste donnera-t-il si on le divise par le produit $(x - 1)(x - 2)$?

Décomposition en facteurs

Mettre en évidence les facteurs communs à :

99. $12a^2x^4y^4 - 24a^3x^2y^5 + 36a^4x^4y^2$.

100. $14a^2b^3x^3y^2 + 21a^3b^2x^2y^3 - 105ab^4xy^4 + 35a^5x^4y$.

101. $8a^mx^{m-1}y^{m-2} - 6a^{m-2}x^my^{m-1} + 12a^{m-1}x^{m-2}y^m$.

102. $6a^{2n}b^nx^{n-1} + 3a^{n-1}b^{n-1}x^{2n} + 8a^nb^{2n}x^{n-1}$.

Décomposer en facteurs :

103. $4a^2 + 4ab + b^2$.

104. $9a^2 - 12ab + 4b^2$.

105. $a^2 + a + \frac{1}{4}$.

106. $9x^2 - 3xy + y^2/4$.

107. $a^2 + 2ab + b^2 + 2bc + c^2 + 2ca$.

108. $x^2 - 2xy + y^2 - 4xz + 4z^2 + 4yz$.

109. $8x^3 + 27y^3$.
$x^6 - 27y^3$.

110. $125a^3b^3 - 64x^3$.

111. $x^2 + (a - b)x - ab$.

112. $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$.

113. $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$.

114. $y^2 - x^2 + 2x - 1$.

115. $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$.

116. $a^4 + a^2b^2 + b^4$.

117. $a^4 - a^2b^2 + b^4$.

118. $a^4 + b^4$.

119. $a^8 + b^8$.

120. $3x(3a - b)^2 - 12x(a + 5b)^2$.

121. $20(a + b)^2 - 45(x + y)^2$.

122. $3a^2 - 6ab + 3b^2 - 12c^2$.

123. $4x^4 + 4y^4 - 44x^2y^2$.

124. $a^2b^2 - 1 + a^2 - b^2$.

125. $bcx - a^2x + acx - abx$.

126. $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$.

127. $(ad + bc)^2 - (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2$.

128. $1 - 2a + 2bc + a^2 - b^2 - c^2$.

129. $(a^2 - b^2 + x^2 - y^2)^2 - 4(ax + by)^2$.

130. $(x - y)(x^2 - z^2) - (x - z)(x^2 - y^2)$.

131. $2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4$.

132. $x^3(z - y^2) + y^3(x - z^2) + z^3(y - x^2) + xyz(xyz - 1)$.

133. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

134. $(x^2 + y^2 + xy)^2 - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2$.

135. $2[x^4 + y^4 + z^4] - (x^2 + y^2 + z^2)^2$
$- 2(x + y + z)^2(x^2 + y^2 + z^2) + (x + y + z)^4$.

136. $(x^4 + y^4 + z^4 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - 2xyz(x + y + z)$.

137. Vérifier que l'expression

$$(ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ax + by + cz)^2,$$

est divisible par $a^2 + b^2 + c^2$ et par $x^2 + y^2 + z^2$.

138. Vérifier que le polynôme $(a + b + c)^m - a^m - b^m - c^m$ est divisible par le produit $(a + b)(b + c)(a + c)$ quand m est impair.

Exercices sur les fractions

Simplifier les fractions suivantes :

139. $\dfrac{3ax^3 + 3a^3x - 6a^2x^2}{ax^3 - a^3x}$.

140. $\dfrac{(a^2 + b^2 - c^2)^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}{4ab^2 + 4abc}$.

141. $\dfrac{x^5 - ax^4 - a^4x + a^5}{x^4 - ax^3 - a^2x^2 + a^3x}$.

142. $\dfrac{(a^8 + 2a^4x^2 + x^4)(a^4 - x^2)}{(a^2 + x)(a^6 - a^4x + a^2x^2 - x^3)}$.

143. $\dfrac{a^{12} + b^{12}}{a^5 + a^4b + ab^4 + b^5}$.

144. $\dfrac{ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)}{ab(x^2 - y^2) + xy(a^2 - b^2)}$.

145. $\dfrac{x^2 - (a + b)x + ab}{x^2 - (a + c)x + ac} \times \dfrac{x^2 - c^2}{x^2 - b^2}$.

146. $\dfrac{a^2 - 18a + 80}{a^2 - 5a - 50} \times \dfrac{a^2 - 6a - 7}{a^2 - 15a + 56} \times \dfrac{a + 5}{a - 1}$.

147. $\dfrac{m^2 + 5m + 6}{m^2 - 1} \times \dfrac{m^2 - 2m - 3}{m^2 - 9}$.

148. $\dfrac{a^4 + 2a^3b - b^4 - 2ab^3}{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$.

149. $\dfrac{x^3 + 5ax^2 - 4a^2x - 20a^3}{3x^2 - 12a^2}$.

150. $\dfrac{2x^3 - 7x^2 - 12x + 45}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9}$.

151. $\dfrac{(x + y)^5 - (x^5 + y^5)}{3x^2y - 3xy^2} \times \dfrac{x^3 + y^3}{x^3 - y^3} \times \dfrac{x - y}{x + y}$.

152. $\dfrac{(x^2 + 2x - 1)^2 - (x^2 + 1)^2}{(x^2 + 1)^2 - (x^2 - 2x - 1)^2}$.

Effectuer les opérations indiquées sur les expressions fractionnées suivantes :

153. $1 - x + x^2 - \dfrac{x^3}{1 + x}$.

154. $\dfrac{2a}{a + x} + \dfrac{3x}{a - x} + \dfrac{3x^2 + a^2}{a^2 - x^2}$.

155. $1 - 2x + x^2 + \dfrac{1 - x^4}{1 + 2x + x^2}$.

156. $\dfrac{1 + 5x}{1 - 5x} - \dfrac{1 - 5x}{1 + 5x}$.

157. $\dfrac{1}{1 + x} + \dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{2x}{1 - x^2}$.

158. $\dfrac{a^3}{(a + b)^3} - \dfrac{ab}{(a + b)^2} + \dfrac{b}{a + b}$.

159. $\dfrac{2ax + x^2}{(a - x)^2} - \dfrac{a^2 + 5ax}{(a + x)^2} - \dfrac{x}{a - x}$.

160. $\dfrac{3a}{(a - 2x)^2} + \dfrac{2a + x}{(a + x)(a - 2x)} - \dfrac{5}{(a + x)}$.

161. $\dfrac{a - 1}{a + 1} + \dfrac{a + 1}{a - 1} - \dfrac{a^2 + 1}{a^2 - 1}$.

162. $\dfrac{30a}{9a^2 - 1} + \dfrac{4}{3a - 1} - \dfrac{5}{3a + 1}$.

163. $\dfrac{a + b}{a} - \dfrac{a}{a + b} + \dfrac{b}{b(a + b)}$.

164. $\dfrac{2}{a^2 - 9a + 20} + \dfrac{3}{a^2 - 11a + 30}$.

165. $\dfrac{x^2 - 1}{(1 + xy)^2 - (x + y)^2} + \dfrac{4}{(1 - y)^2} - \dfrac{3}{1 - y^2}$.

166. $\frac{5}{1+5a} - \frac{3}{1-5a} + \frac{10(5a^2+2a)}{1-25a^2}$.

167. $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b} - \frac{a^2-ab+b^2}{a-b} + \frac{2b^3-b^2+a^2}{a^2-b^2}$.

168. $\frac{3a-6b}{a+b} - \frac{5a-6b}{a-b} - \frac{4a-5b}{a+b} + \frac{7a-8b}{a-b}$.

169. $\frac{b+1}{b-a} + \frac{5a+3b}{a^2-b^2} + \frac{b-1}{a+b} + \frac{3}{b-a}$.

170. $\frac{x+1}{2x-2} - \frac{x-1}{2x+2} - \frac{4x}{x^2-1} + \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

171. $\frac{a}{a-b} + \frac{a}{a+b} + \frac{2a^2}{a^2+b^2} + \frac{4a^2b^2}{a^4-b^4}$.

172. $\frac{3c}{(c+2a)^2} - \frac{5}{(c+a)} - \frac{2c+a}{ac+c^2-2a^2}$.

173. $\frac{2mn}{m^3+n^3} - \frac{m+n}{m^2-mn+n^2} + \frac{1}{m+n}$.

174. $\frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a} + \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

175. $\frac{x^{3n}}{x^n-1} - \frac{x^{2n}}{x^n+1} + \frac{1}{x^n-1} + \frac{1}{x^n+1}$.

176. $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$.

177. $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$.

178. $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$.

179. $\frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)}$.

180. $\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-c)(b-a)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)}$.

Effectuer les multiplications :

181. $\frac{ax+x^2}{2b-cx} \times \frac{2bx-cx^2}{(a+x)^2}$.

182. $\frac{a^2x^2}{y^2} \times \frac{xy}{a(x+y)} \times \frac{x^2-y^2}{axy}$.

183. $\frac{a+x}{(m+n)^3} \times \frac{x^2-y^2}{12} \times \frac{(m+n)^2}{m-n} \times \frac{6(m^2-n^2)}{x+y}$.

184. $\frac{x^2+xy}{x^2+y^2} \times \left(\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}\right) \times \frac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2}$.

185. $\frac{a^3-4a-a^2x+4x}{c^2+d^2+2cd} \times \frac{c+d}{a^3+ax^2-2a^2x} \times \left(\frac{a-x}{d} + \frac{a-x}{c}\right)$.

186. $\frac{x^4+2x^2+9}{2x+2a} \times \frac{x^3-a}{5ax^2+5a^3-10a^2x}$.

187. $\frac{1-x^2}{1+2y+y^2} \times \frac{1-y^2}{y^2-2xy+x^2}\left(\frac{x}{1-x} - \frac{y}{1-y}\right)$.

188. $\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2} \times \frac{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}{\frac{x^2+y^2}{y}-x}$.

189. $\frac{a^5-a^3b^2}{a^3+b^3} \times \frac{a^2-ab+b^2}{a^4-2a^3b+a^2b^2} \times \frac{a^4-b^4}{a^2-2ab+b^2} \times \frac{a-b}{a^2+ab}$.

190 $\frac{21xy^2}{4(r-s)} \times \frac{m+n}{bx^2y^2} \times \frac{3x(m-n)}{7(r+s)} \times \frac{r^2-s^2}{4(m^2-n^2)}$.

191. $\frac{y}{2}\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}\right)\frac{x^2-y^2}{x^2y+xy^2} \times (x+y)$.

192. $(m^3+n^3)\left(\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2} - \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)\left(\frac{m}{4n} - \frac{n}{4m}\right)$.

Effectuer les divisions :

193. $\frac{a^3-x^3}{a^2+x^2} : \frac{a-x}{a^2-ax+x^2}$.

194. $\frac{x^4-a^4}{(x-a)^2} : \frac{x-a}{x^2+ax}$.

195. $\left(\frac{a^3}{b^3} - \frac{b^3}{a^3}\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)$.

196. $\left(a + \frac{b-a}{1+ab}\right) : \left[1 - \frac{1+ab}{a(b-a)}\right]$.

197. $\left(a - \frac{b^2}{2a}\right)\left(a - \frac{a^2+b^2}{a+b}\right) : \left(1 - \frac{a}{a+b}\right)$.

198. $\left(1 - \frac{a-b}{a+b}\right) : \left(\frac{a+b}{a-b} - 1\right)$.

199. $\left(\frac{x}{x-a} + \frac{a}{x+a}\right) : \left(\frac{x}{x-a} - \frac{a}{x+a}\right)$.

200. $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{x}{ab}\right)(a+b+x) : \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{ab} - \frac{x^2}{a^2b^2}\right)$

201. $\left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}\right)x^2 : \left(\frac{1+x}{1-x} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)$.

202. $$\frac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}:\frac{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a+c}}{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a+c}}.$$

203. $$\frac{a^2b^2}{c}:\left\{\frac{a^2c^2}{b}:\left[\left(\frac{b^2c^2}{a}\times\frac{ac}{b^2}\right):\left(\frac{ab}{c^2}:\frac{bc}{a^2}\right)\right]\right\}.$$

Effectuer les opérations suivantes :

204. $$\frac{1+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}\times\frac{x-1+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}:\frac{x^2+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}.$$

205. $$\frac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-1}{\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{a}{b}+1}:\left(\frac{a-b}{1+\dfrac{b}{a}}\times\frac{1+\dfrac{b^3}{a^3}}{\dfrac{a^2}{b}-\dfrac{b^2}{a}}\right).$$

206. $$\frac{\left(\dfrac{3m+m^3}{1+3m^2}\right)^2-1}{-\dfrac{3m^2+1}{m^3+3m}+1}:\left(\frac{9}{m^2}+\frac{-21+m^2}{3m^2+1}\right).$$

207. $$\left(\frac{x^4-a^4}{x^2-2ax+a^2}\times\frac{x-a}{x^2+ax}\right):\left[\frac{x^3+a^3}{x^5-a^2x^3}\times\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}\right)\right].$$

208. $$\frac{\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^3\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^3}{x^3-a^3}:\frac{x^2-a^2}{x^2+ax+a^2}.$$

209. $$\left[\frac{y}{x}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}\right):\frac{x^2y+xy^2}{x^2-y^2}\right]:\frac{1}{x+y}.$$

$$\frac{\left[\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^3+3\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2+3\dfrac{x+y}{x-y}+1\right]}{\left[\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^3+3\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^2+3\dfrac{x-y}{x+y}+1\right]}.$$

$$\frac{\left(1-\dfrac{z^3}{(x+y)^3}\right)\left(1+\dfrac{z}{x+y}\right)}{\left[1+\dfrac{z}{x+y}+\left(\dfrac{z}{x+y}\right)^2\right]\left(1-\dfrac{z^2}{(x+y)^2}\right)}.$$

212. $$\frac{(ax+b)^4-(cx+d)^4}{(ax+b)\left[x^2(a^2+c^2)+2x(ab+cd)+b^2+d^2\right]}.$$

213. Simplifier $$\frac{x-1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}:\frac{x+1}{2-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}.$$

Identités

Vérifier les identités suivantes :

214. $$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab.$$

215. $$\left(\frac{m^2-1}{m^2+1}\right)^2+\left(\frac{2m}{m^2+1}\right)^2=1.$$

216. $$(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)=a^3+b^3+c^3.$$

217. $$(a+b)^2-(c+d)^2+(a+c)^2-(b+d)^2=2(a-d)(a+b+c+d).$$

218. $$a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc=(a+b)(b+c)(c+a).$$

219. $$(m^4-n^4)+2n(m^3+n^3)-(m+n)^2(m-n)^2=2m^2n(m+n).$$

220. $$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2$$
$$=(ab'-ba')^2+(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2.$$

221. $$[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]^2=2[(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4].$$

222. $$\frac{x^2y^2z^2}{b^2c^2}+\frac{(x^2-b^2)(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)}+\frac{(x^2-c^2)(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}$$
$$=x^2+y^2+z^2-b^2-c^2.$$

223. $$\frac{y^2z^2}{b^2c^2}+\frac{(z^2-b^2)(b^2-y^2)}{b^2(c^2-b^2)}+\frac{(c^2-z^2)(c^2-y^2)}{c^2(c^2-b^2)}=1.$$

224. Si $a+b+c=2p$, démontrer les identités suivantes :

1° $$1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2p(p-a)}{bc};$$

2° $$1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2=\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}.$$

225. Si : $a^2=b^2+c^2$,
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
se réduit à $$=\frac{1}{2}bc.$$

226. Vérifier que si
$$x=\frac{2b^2-a^2+c^2}{3a}\quad\text{et}\quad y=\frac{2a^2-b^2+c^2}{3b},$$
$$\frac{x+a}{y+b}=\frac{b}{a}.$$

227. Vérifier que si $ax+by+cz=0$,
l'expression $$\frac{ax^2+by^2+cz^2}{bc(y-z)^2+ac(z-x)^2+ab(x-y)^2}$$
est constante, quels que soient x, y, z.

228. Vérifier que si

$$\frac{m}{x}=\frac{n}{y}=\frac{p}{z} \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

on a aussi
$$\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{p^2}{c^2}=\frac{m^2+n^2+p^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

229. Vérifier que l'on a toujours :

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab.$$

230. Vérifier que la moyenne arithmétique de deux nombres a et b est plus grande que leur moyenne géométrique.

231. En supposant a, b et c positifs, vérifier que l'on a :

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)>6abc.$$

232. Vérifier l'inégalité

$$a^2+b^2+c^2>ab+ac+bc.$$

233. a, a', a'', b, b', b'' étant des nombres positifs, démontrer que si l'on a :

$$\frac{a}{b}<\frac{a'}{b'}<\frac{a''}{b''},$$

on a aussi :
$$\frac{a}{b}<\frac{a+a'+a''}{b+b'+b''}<\frac{a''}{b''}.$$

Radicaux arithmétiques et algébriques

Simplifier les expressions suivantes :

234. $\sqrt{12}+2\sqrt{27}+3\sqrt{75}-9\sqrt{48}.$

235. $3\sqrt{2}+4\sqrt{8}-\sqrt{32}.$

236. $\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{48}-\sqrt{75}.$

237. $8\sqrt{\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\sqrt{12}+4\sqrt{27}-2\sqrt{\frac{3}{16}}.$

238. $2\sqrt{\frac{5}{3}}+\sqrt{60}-\sqrt{\frac{3}{5}}.$

239. $(6+12\sqrt{7})(3-5\sqrt{7}).$

240. $(9\sqrt{12}+3)(5\sqrt{12}+8)$

241. $(9+2\sqrt{10})(9-2\sqrt{10}).$

242. $(7-2\sqrt{3})(7+2\sqrt{3}).$

243. $(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2.$

244. $(2\sqrt{6}-3\sqrt{5})^2.$

245. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(2\sqrt{2}-\sqrt{3}).$

246. $(5\sqrt{3}-7\sqrt{6})(2\sqrt{8}-3).$

247. $(5\sqrt{14}+3\sqrt{5})(7\sqrt{14}-2\sqrt{5}).$

248. $(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})(\sqrt{72}-5\sqrt{20}-2\sqrt{2}).$

249. $(\sqrt{72}+\sqrt{32}-4):\sqrt{8}.$

250. $(3\sqrt{15}-5\sqrt{27}+8\sqrt{6}):2\sqrt{3}.$

Rendre rationnel le dénominateur des fractions suivantes.

251. $\frac{7}{\sqrt{8}-2}.$

252. $\frac{1}{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}.$

253. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}.$

254. $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$

255. $\frac{3+4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}.$

256. $\frac{145+12\sqrt{11}}{6-2\sqrt{11}+14\sqrt{2}}.$

Simplifier les expressions suivantes :

257. $\sqrt{45c^3}-\sqrt{80c^3}+\sqrt{5a^2c}.$

258. $\sqrt{18a^5b^3}+\sqrt{50a^3b^3}.$

259. $\sqrt{18a^3b^3c^4+9a^2b^2c^4}.$

260. $\sqrt{3a^2c+6abc+3b^2c}.$

261. $\sqrt{4a^5b^2-20a^3b^3+25ab^4}.$

262. $\sqrt{\frac{a^4c}{b^2}}+\sqrt{\frac{a^2c^3}{bd^2}}-\sqrt{\frac{a^2cd^2}{bc^2}}.$

263. $3b^2\sqrt{a^3c} + \frac{2}{c}\sqrt{a^3c^3} - c^4\sqrt{\frac{ac}{b^2}}$.

264. $\sqrt{\frac{m-n}{a^2}} + \sqrt{\frac{m}{n^2} - \frac{1}{n}}$.

265. $\sqrt{\frac{a^3b^2c - 2a^2b^3d}{c^2d^2}}$.

266. $\sqrt{\frac{a^2x - 2ax^2 + x^3}{a^2 + 2ax + x^2}}$.

267. $\sqrt{9x+27} + 3\sqrt{4x+12}$.

268. $\sqrt{\frac{a}{a^2bd - 2ab^2d + b^3d}}$.

269. $\sqrt{\frac{x^3 + 2x^2 + x}{a^3 + a^2b}}$.

270. $\sqrt{\frac{a^3 - ax^2 - a^2x + x^3}{b^3c^3d}}$.

271. $\left(a\sqrt{\frac{b}{a}} - b\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2$.

272. $(\sqrt{a+c} - \sqrt{a-c})(\sqrt{a+c} + \sqrt{a-c})$.

273. $(\sqrt{R^2 - x^2})^3 \times \sqrt{\frac{x}{R^2 - x^2}}$.

274. $\sqrt{x^2(R^2 - x^2)^3} \times \sqrt{\frac{R-x}{R+x}}$.

275. $\sqrt{x(2R-x)^5} \times \left(\sqrt{\frac{2R+x}{2R-x}}\right)^3 \times \sqrt{4R^2 - x^2}$.

276. $\sqrt{\frac{x}{2R-x}} \times \sqrt{4R^2 - x^2} \times \sqrt{2R+x}$.

Rendre rationnel le dénominateur des fractions suivantes :

277. $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$.

278. $\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$.

279. $\frac{x - \sqrt{a^2 + x^2}}{x + \sqrt{a^2 + x^2}}$.

Simplifier

280. $\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^4}}$.

281. $\frac{(x + \sqrt{x^2 - a^2})^4 - x^4}{4[x + \sqrt{x^2 - a^2}]^2}$.

282. $\frac{(x+1)^2 - (x^2-1) + 2\sqrt{x^2-1}}{(x^2-1) - (x-1)^2 + 2\sqrt{x^2-1}}$.

283. $\frac{\sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2} - \sqrt{x^2+a^2}} + \frac{\sqrt{x^2+a^2} - \sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{x^2-a^2}}$.

284. $\left[\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{b}+1} + \frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{a}+1}\right]\left[\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{b}-1} + \frac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{a}-1}\right] - \frac{a-1}{b-1} - \frac{b-1}{a-1}$.

285. $\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \frac{2}{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}}$.

CHAPITRE III

FONCTIONS D'UNE VARIABLE

§ I. GÉNÉRALITÉS. VALEURS LIMITES.

64. DÉFINITIONS.

On appelle **variable** toute quantité qui peut prendre diverses valeurs. On la désigne généralement par l'une des lettres x, y, z.

Une **constante** est une quantité dont la valeur ne peut changer.

Une variable est dite **indépendante** lorsqu'on peut lui donner n'importe quelle valeur.

Une quantité est dite fonction d'une variable indépendante lorsque sa valeur dépend de celle donnée à cette variable indépendante.

Ainsi, l'aire d'un cercle est fonction de son rayon, la dilatation d'un solide, de sa température, la résistance de l'air opposée à un mobile est fonction de sa vitesse...

Une fonction de x se représente par le symbole $f(x)$ qui s'énonce fonction de x.

Exemple : $f(x) = x^2 - 5x + 3$.

On peut aussi employer comme symbole d'autres lettres $g(x)$, $h(x)$ ou $\varphi(x)$, $\psi(x)$ etc.

Le fait que la valeur d'une quantité y dépend de celle donnée à x sera notée par une égalité de la forme

$$y = f(x).$$

Si le second membre de l'égalité $y = f(x)$ est un polynôme entier de degré un ou deux, etc, on dit que y est une fonction de x du premier degré ou du second degré, etc.

Exemple : $y = ax + b$, $y = ax^2 + bx + c$.

65. VALEUR LIMITE D'UNE VARIABLE.

On dit qu'une quantité variable x tend vers une limite a si la différence entre x et a peut devenir et rester en valeur absolue aussi petite que l'on veut.

Ce fait se note par le symbole :

$$|x - a| < \varepsilon,$$

où ε désigne une quantité positive aussi petite que l'on veut.

66. VALEURS LIMITES REMARQUABLES DE CERTAINES FRACTIONS.

On sait que de deux fractions qui ont le même dénominateur la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.

Considérons la fraction $y = \frac{x}{a}$ où x est une variable et a une quantité que nous supposerons positive.

Si nous donnons à x des valeurs de plus en plus petites, la fraction ira en diminuant et prendra des valeurs de plus en plus petites avec x.

On pourra choisir la valeur de x de telle manière que la fraction soit plus petite qu'un nombre donné choisi aussi petit que l'on veut.

Ainsi si l'on désire, par exemple, que la fraction $\frac{x}{3}$ soit inférieure à $\frac{1}{1\,000}$, il suffira de prendre $x < \frac{3}{1\,000}$.

On dit que la fraction $\frac{x}{3}$ tend vers zéro avec x.

Lorsqu'une quantité variable peut ainsi devenir plus petite que toute quantité donnée à l'avance, si petite soit-elle, on dit qu'elle tend vers zéro.

Si nous donnons à x au contraire *des valeurs de plus en plus grandes*, la fraction ira en augmentant et il sera possible de la rendre supérieure à tout nombre donné en prenant une valeur de x suffisamment grande. Ainsi, si l'on veut que la fraction $\frac{x}{3}$ soit supérieure à 1 000 il suffira de prendre x supérieur à 3 000.

Lorsqu'une quantité peut ainsi devenir plus grande que toute quantité donnée à l'avance, si grande soit-elle, on dit qu'elle tend vers l'infini,

ce qu'on note par le symbole $+\infty$.

Si la quantité a était négative, en donnant à x des valeurs de plus en plus petites, la fraction deviendrait encore de plus en plus petite en valeur absolue. On dirait encore qu'elle tend vers zéro par valeurs négatives.

Si l'on donne à x des valeurs de plus en plus grandes, la fraction devient de plus en plus grande en valeur absolue, mais cette fois négative, on dira qu'elle tend vers $-\infty$.

En remarquant que de deux fractions qui ont le même numérateur, la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur, on démontrerait de même que :

Si le dénominateur d'une fraction de la forme $y = \frac{a}{x}$ tend vers zéro, la fraction augmente indéfiniment en valeur absolue, et tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ suivant son signe.

Si le dénominateur de la fraction $y = \frac{a}{x}$ devient de plus en plus grand en valeur absolue, la fraction tend vers zéro.

67. **FORMES INDÉTERMINÉES.** — Forme $\frac{0}{0}$.

Soit une fraction $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

où le numérateur et le dénominateur sont deux fonctions de x. Si pour une valeur donnée a de x, les deux termes s'annulent, la fonction prend la forme $\frac{0}{0}$ qui n'a pas de sens. On remarque alors que, d'après les propriétés de la divisibilité, les deux polynômes sont tous deux divisibles par $x - a$. Si l'on simplifie la fraction par ce facteur, elle prend la forme $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ et différents cas peuvent alors se présenter :

Si les polynômes $f'(a)$ *et* $g'(a)$ *ne sont pas nuls, la fraction a pour valeur limite le rapport* $\frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Si $f'(a) = 0$ *avec* $g'(a) \neq 0$, *la fraction a pour valeur limite* 0.

Si $g'(a) = 0$ *avec* $f'(a) \neq 0$, *la fraction* tend vers l'infini *quand* x *tend vers* a.

Enfin, si $f'(a) = g'(a) = 0$, *on retrouve une forme indéterminée. Les polynômes* $f'(x)$ *et* $g'(x)$ *sont encore divisibles par* $x - a$. *On effectue la simplification et on raisonne comme plus haut sur la nouvelle fraction* $\frac{f''(x)}{g''(x)}$ *ainsi obtenue.*

Exemple : Chercher la valeur limite de :

$$y = \frac{3x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 16x - 8}{2x^3 - 5x + 3}$$

lorsque $x = 1$

Pour $x = 1$, le numérateur et le dénominateur sont nuls, ils sont divisibles par $x - 1$. On peut écrire :

$$y = \frac{(x-1)(3x^3 - 3x^2 - 8x + 8)}{(x-1)(2x-3)} = \frac{3x^3 - 3x^2 - 8x + 8}{2x - 3}.$$

Pour $x = 1$, le numérateur est nul sans que le dénominateur le soit ; on aura donc :

$$\lim_{x \to 1} y = 0.$$

68. **FORME** $\frac{\infty}{\infty}$.

Lorsque x tend vers l'infini, le polynôme f(x) prend le signe de son terme de degré le plus élevé.

En effet soit $f(x)$ un polynôme, qui égale par exemple,

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

où x prend des valeurs de plus en plus grandes en valeur absolue.

Le polynôme peut s'écrire, puisque x n'est pas nul,

$$x^4\left[a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3} + \frac{e}{x^4}\right].$$

Lorsque x tend vers l'infini, les fractions de la forme $\frac{b}{x}, \frac{c}{x^2} \cdots \frac{e}{x^4}$ dont le numérateur reste constant, tandis que le dénominateur augmente indéfiniment tendent vers zéro et à la limite

$$\lim_{x \to \infty} y = \lim ax^4.$$

Soit la fraction de la forme $\frac{f(x)}{g(x)}$ dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes de degré n et p respectivement. Soient ax^n et bx^p les termes de degré le plus élevé.

D'après ce qui précède : $\lim f(x) = ax^n$;
$\lim g(x) = bx^p$

donc : $$\lim_{x \to \infty} y = \lim \frac{ax^n}{bx^p}.$$

Lorsque x tend vers $\pm\infty$, la valeur limite d'une fraction rationnelle est celle du quotient des termes de degré le plus élevé de son numérateur et de son dénominateur.

Si $n > p$, on peut écrire $y = \frac{ax^{n-p}}{b}$ *et* y *tend vers l'infini avec* x ;

si $n = p$, $\quad \lim y = \frac{a}{b}$;

si $n < p$, on aura : $\lim y = \frac{a}{bx^{p-n}}$ et lorsque x tend vers ∞, y *tend vers zéro.*

Exemple : $y = \frac{a'x + b'}{ax + b}$ pour $x = \infty$, a pour valeur limite $\frac{a'}{a}$.

$\frac{x^2 - 3x + 2}{5x^2 + 7x - 7}$ a pour valeur limite $\frac{1}{5}$.

$y = \frac{x^3 - 3x + 1}{2x^2 - x}$ a même valeur limite que $\frac{x^3}{2x^2} = \frac{x}{2}$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, y a pour limite $+\infty$.
Lorsque x tend vers $-\infty$, y a pour limite $-\infty$.

§ *II. COORDONNÉES. REPRÉSENTATION GRAPHIQUE.*

69. **SYSTÈME DE COORDONNÉES.** — Soient deux axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$ de même origine O. D'un point M quelconque du plan, menons les perpendiculaires MP et MQ sur $x'x$ et $y'y$.

On appelle abscisse du point M, la valeur algébrique du vecteur $\overrightarrow{OP}$: $\quad \overline{OP} = \overline{QM} = x$;
on appelle ordonnée du point M, la valeur algébrique du vecteur $\overrightarrow{OQ}$: $\quad \overline{OQ} = \overline{PM} = y$.

L'ensemble de ces deux nombres algébriques constitue les **coordonnées** du point M. Les axes $x'x$ et $y'y$ sont dits **axes de coordonnées.**

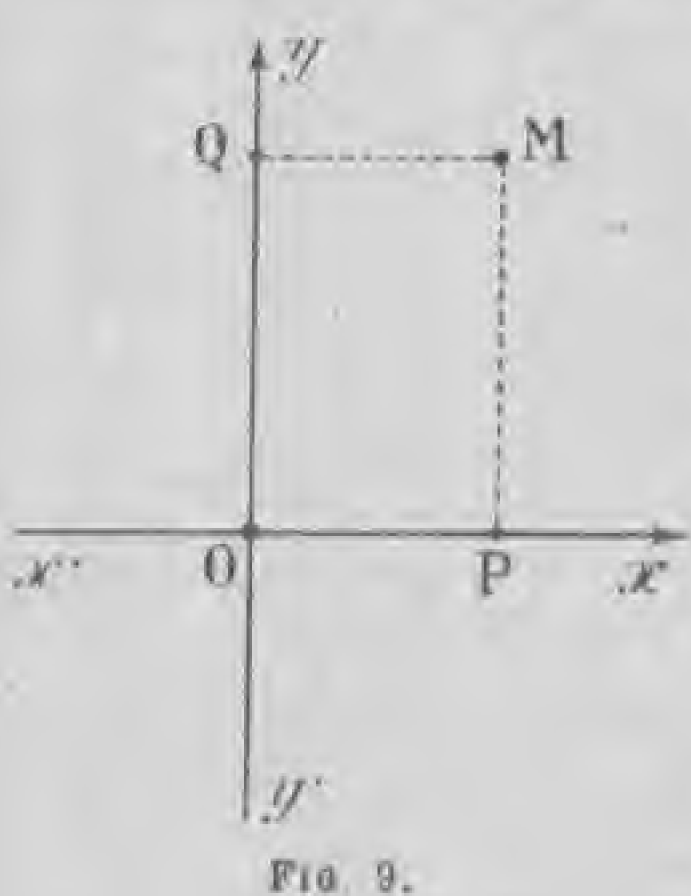


Fig. 9.

A tout point du plan correspond un système bien déterminé de coordonnées, car à tout point M correspondent un seul point P et un seul point Q donc un seul système de valeurs de x et de y.

Réciproquement, à un système de valeurs déterminées de x et de y, correspond un seul couple de points P et Q, donc un seul point M.

Il suffit pour déterminer un point, d'indiquer ses coordonnées ; on le note de la manière suivante $M(x, y)$, en indiquant l'abscisse en premier lieu.

Exemple : M(2,3) signifie : point M d'abscisse $x = \overline{OP} = 2$ et d'ordonnée $y = \overline{PM} = 3$.

70. DISTANCE DE DEUX POINTS.

Soient $M_1(x_1, y_1)$ $M_2(x_2, y_2)$ deux points donnés. Si l'on mène le contour des coordonnées de M_1 et M_2, OP_1M_1 et OP_2M_2, et la parallèle menée de M_2 à Ox qui coupe P_1M_1 en E, on a :

$$\overline{M_1M_2}^2 = \overline{M_1E}^2 + \overline{EM_2}^2.$$

$$\overline{M_1E} = \overline{P_1E} - \overline{P_1M_1}$$
$$= \overline{P_2M_2} - \overline{P_1M_1}$$
$$= (y_2 - y_1).$$

$$\overline{EM_2} = \overline{P_1P_2} = \overline{OP_2} - \overline{OP_1}$$
$$= x_2 - x_1$$

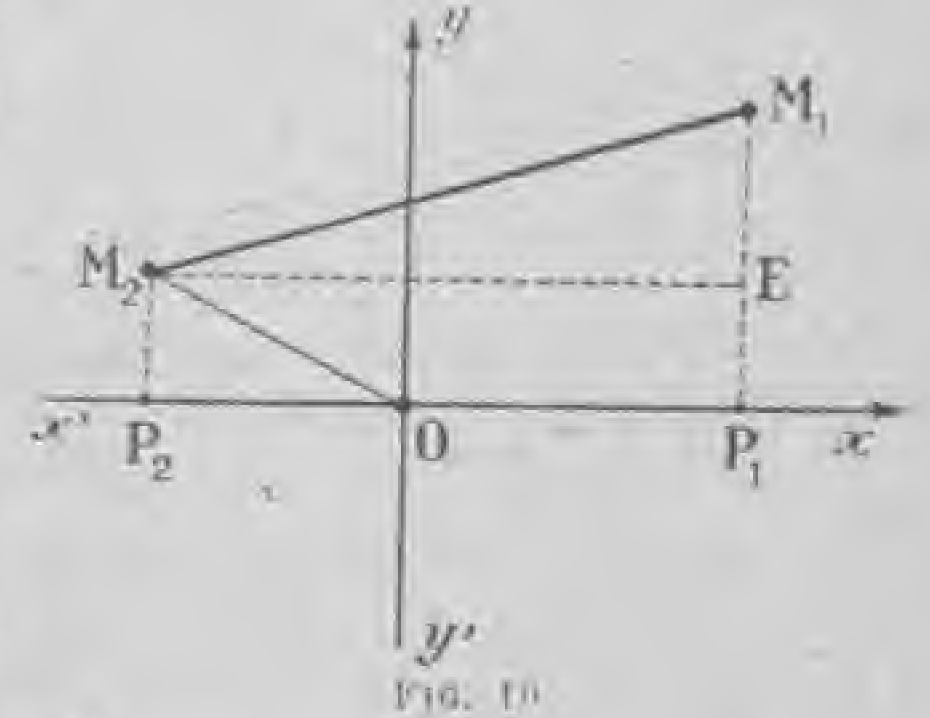


Fig. 10

$$\overline{M_1M_2}^2 = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2.$$

Cas particulier. — Si le point M_1 est à l'origine, $x_1 = y_1 = 0$ et

$$\overline{OM_2}^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

71. COORDONNÉES DU MILIEU D'UN SEGMENT.

Soit M, milieu du segment AB limité par les points $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$.

Les points P et Q projections de M sur Ox et Oy sont les milieux respectifs des segments P_1P_2 et Q_1Q_2, projections de AB.

On a donc, d'après le n° 11

$$\overline{OP} = \frac{\overline{OP_1} + \overline{OP_2}}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

$$\overline{OQ} = \frac{\overline{OQ_1} + \overline{OQ_2}}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Fig. 11.

72. REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE VARIATION DE FONCTION.

Soit une fonction $y = f(x)$, dont le second membre est parfaitement défini, quand on y remplace la variable x par une valeur donnée. Aux valeurs croissantes

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$$

attribuées successivement à x correspondent les valeurs de la fonction :

$$y_1, y_2 \dots y_{n-1}, y_n.$$

On a ainsi défini les coordonnées d'un certain nombre de points

$$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2) \dots M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}), M_n(x_n, y_n).$$

Si l'on donne à x des valeurs intermédiaires, on obtiendra pour y de nouvelles valeurs et à chaque couple de valeurs de x et de y, correspond un nouveau point. Si l'on attribue ainsi à x toutes les valeurs possibles, on obtiendra une série de points formant un trait continu, constituant une courbe qui est dite courbe représentative de la fonction $y = f(x)$.

On appelle **point courant** un point dont les coordonnées *variables* x et y vérifient la relation $y = f(x)$.

Cette relation est dite **l'équation de la courbe** et celle-ci est le lieu géométrique des points dont les coordonnées vérifient la relation

$$y = f(x).$$

Par exemple, dans la fonction $y = \frac{x^2}{2}$, si l'on donne à x la suite des valeurs croissantes

$$-6 \quad -4 \quad -2 \quad 0 \quad 2 \quad 4 \quad 6$$

on obtient pour y la série des valeurs

$$18 \quad 8 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 8 \quad 18.$$

Si l'on représente ces couples de valeurs par des points A, B... F, G, et si l'on calcule de nouvelles valeurs de y correspondant à des valeurs intermédiaires de x on obtient de nouveaux points. L'ensemble donne la courbe représentative de la variation de la fonction $y = \frac{x^2}{2}$.

A une fonction définie $y = f(x)$ on peut faire correspondre une courbe représentative ; inversement, à une courbe donnée par ses propriétés géométriques, correspond une relation entre les coordonnées des points de cette courbe, dite équation de la courbe.

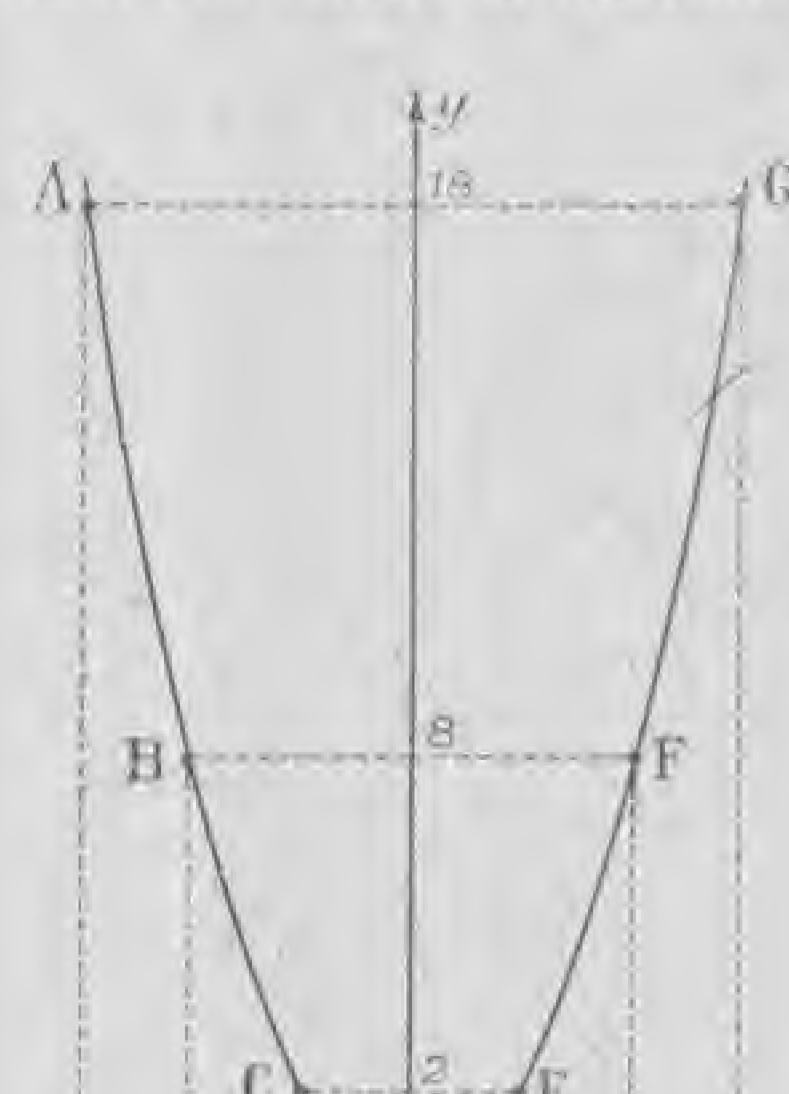


Fig. 12.

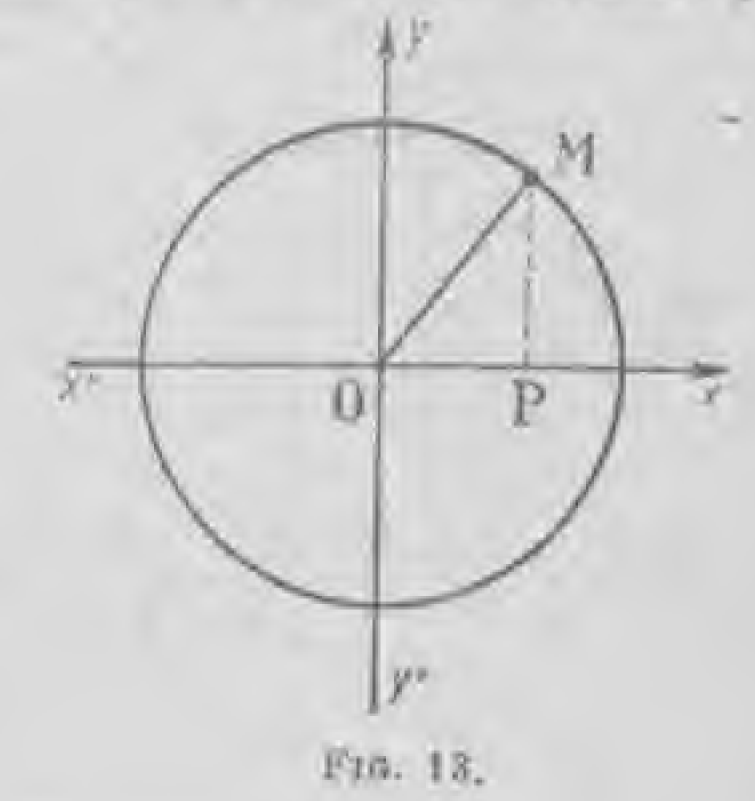


Fig. 13.

Exemple : Soit un cercle de centre O et de rayon R. Si l'on prend pour axes $x'x$ et $y'y$ deux diamètres rectangulaires du cercle on pourra écrire, quelle que soit la position du point M situé sur le cercle :

$$\overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = R^2$$

ou

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Cette relation est l'équation du cercle rapporté à deux diamètres rectangulaires.

73. TRANSLATION DES AXES DE COORDONNÉES.

Connaissant l'équation d'une courbe dans un système d'axes, il peut être utile de chercher l'équation de cette courbe dans un autre système. Pour cela, il suffit de connaître les relations qui existent entre les coordonnées d'un même point pris dans deux systèmes différents.

Relations entre les coordonnées d'un même point pris par rapport à des axes parallèles et de même sens.

Soient $x'Ox$ et $y'Oy$, $X'O_1X$ et $Y'O_1Y$ deux systèmes d'axes rectangulaires et de même sens. La position du nouveau système par rapport au premier est définie si l'on connaît les coordonnées du centre O_1.

$$\overline{OI} = \overline{HO_1} = x_0$$

et $\overline{OH} = \overline{IO_1} = y_0$.

Soit M un point quelconque.

Ses coordonnées par rapport au système xOy sont :

$$\overline{OP} = x \quad \overline{PM} = y ;$$

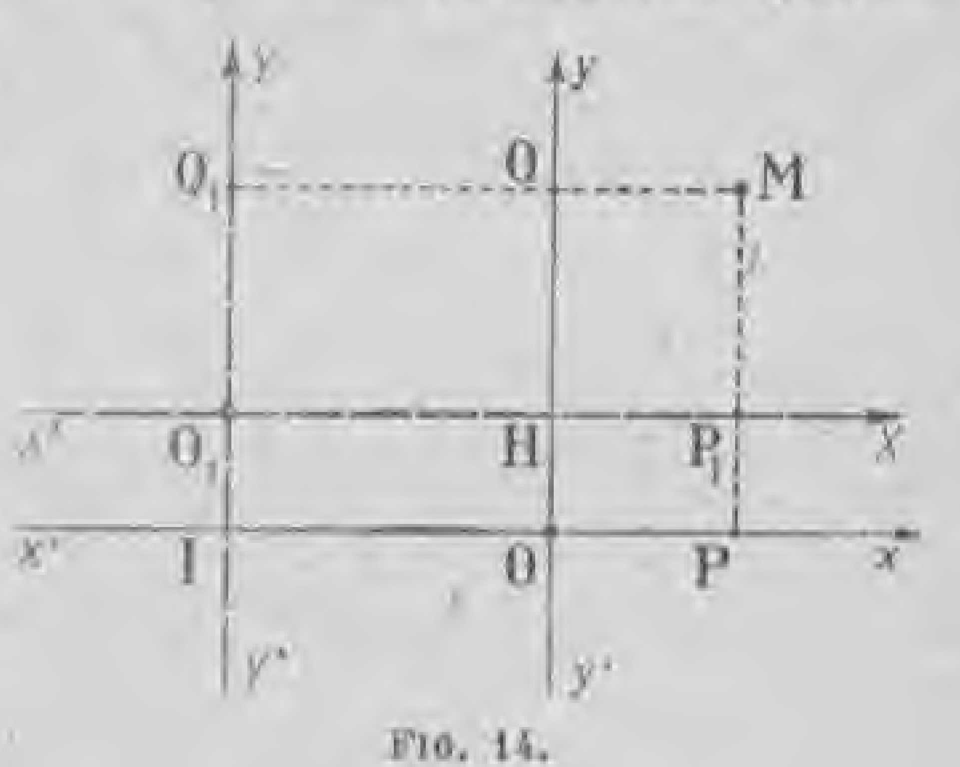


Fig. 14.

ses coordonnées par rapport au système XO_1Y sont :

$$\overline{O_1P_1} = \overline{IP} = X \text{ et } \overline{P_1M} = \overline{O_1Q_1} = Y.$$

On a les relations :

$$\overline{OP} = \overline{OI} + \overline{IP} = \overline{OI} + \overline{O_1P_1} ; \qquad x = x_0 + X,$$
$$\overline{PM} = \overline{PP_1} + \overline{P_1M} = \overline{OH} + \overline{HQ_1} \qquad y = y_0 + Y.$$

74. GRAPHIQUE DE TEMPÉRATURE. — Supposons que dans une journée d'hiver, on ait relevé sur le thermomètre centigrade les températures suivantes :

7 h.. $-3°$	13 h.. $+5°,7$
8 h.. $-1°,5$	14 h.. $+6°$
9 h.. $+1°$	15 h.. $+5°$
10 h.. $+3°$	16 h.. $+4°$
11 h.. $+4°$	17 h.. $+3°$
12 h.. $+5°$	18 h.. $+2°,4$.

L'examen de ce tableau permet de se rendre compte des variations de la température ; mais ces variations seront bien plus faciles à suivre sur un graphique construit de la manière suivante :

Sur une feuille de papier quadrillé on choisit deux droites, l'une Ox dont les divisions indiqueront les heures, l'autre Oy perpendiculaire à Ox, et dont les divisions indiqueront les températures.

Sur la ligne Ox on marque 7 h au point O, puis de gauche à droite successivement 8 h, 9 h, 10 h, etc.

De même sur la ligne Oy on fait correspondre 0° au point O, puis à partir de ce point on inscrit de bas en haut 1°, 2°, 3°, etc., et de haut en bas — 1°, — 2°, etc.

Pour représenter la température — 3° relevée à 7 h, on suit la *verticale* de 7 h jusqu'à la rencontre de l'*horizontale* de — 3° ; le point A ainsi déterminé représente la température à 7 h.

De même les températures à 8 h, 9 h, 10 h..., seront représentées pa les points de rencontre :

de la *verticale* de 8 h et de l'*horizontale* de — 1°,5 (*point* B) ;
» de 9 h » » de + 1° (*point* C) ;
» de 10 h » » de + 3° (*point* D)

En joignant les points A, B, C..., L par un trait continu, on obtient le *graphique* de la température.

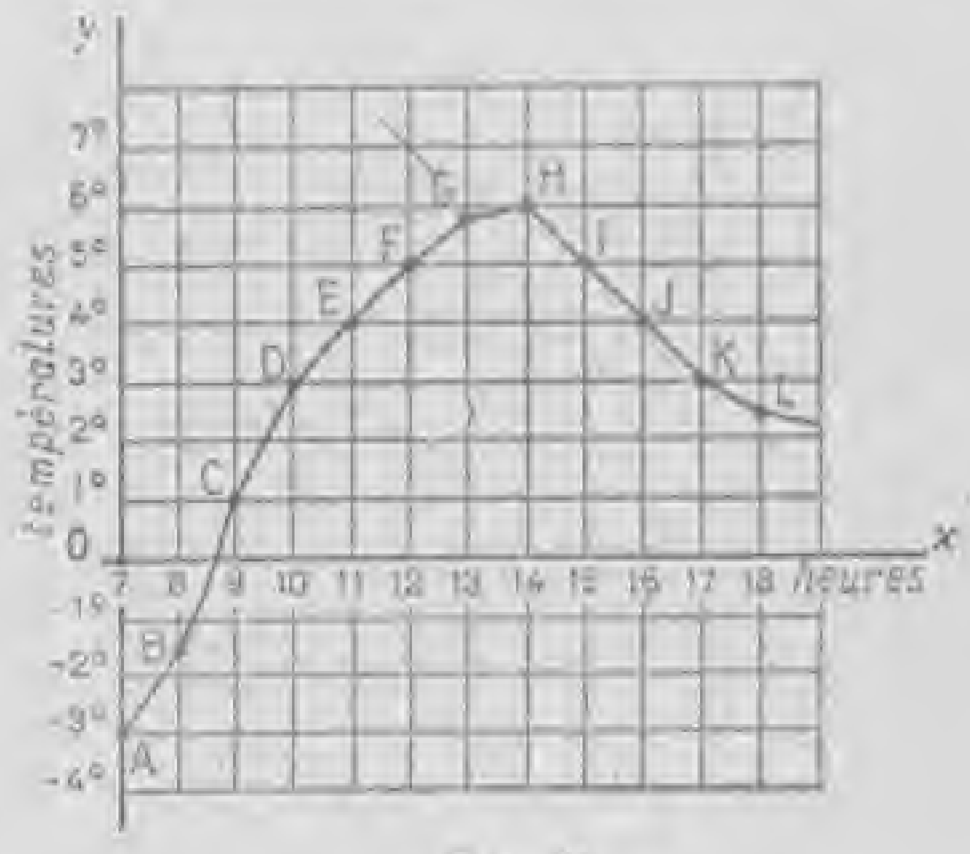


FIG. 15.

Avantage du graphique. — Ce graphique a, sur le tableau ci-dessus, l'avantage de parler aux yeux. En effet, quand la température s'élève, la ligne monte ; quand la température diminue, la ligne descend ; d'un seul coup d'œil on peut donc se rendre compte de la façon dont la température a varié.

Remarque. — Si l'on avait fait les observations de quart d'heure en quart d'heure, on aurait obtenu un graphique *plus exact*.

On construit des thermomètres enregistreurs qui inscrivent automatiquement et d'une manière continue les variations de la température.

75. GRAPHIQUE DE LA TEMPÉRATURE D'UN MALADE. — Dans certaines maladies, les médecins recourent aux graphiques pour suivre les variations de température du malade..

La température est prise 2 fois par jour, le matin et le soir. L'échelle des variations s'étend de 35° à 42°.

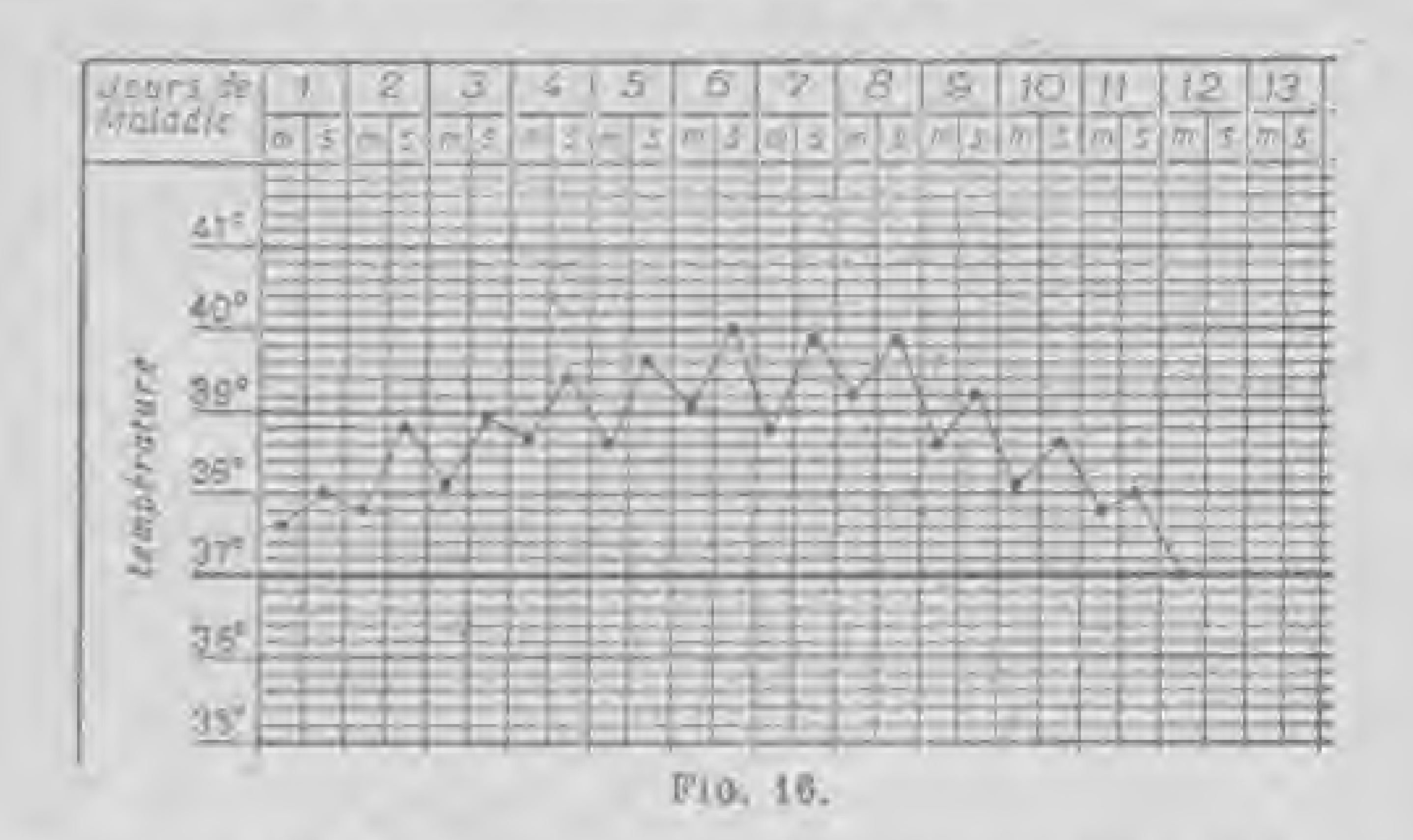


FIG. 16.

Le graphique (fig. 16) montre que la température du malade est allée en croissant jusqu'au 6e jour, et qu'elle a commencé à décroître le 8e jour pour redevenir normale (37°) le 12e jour.

§ III. CONTINUITÉ. SENS DE VARIATION.

76. DÉFINITIONS. — ***Une fonction d'une variable x est dite définie pour une valeur de x, lorsque pour cette valeur de x, elle prend une valeur bien déterminée.***

Ainsi la fonction $y = x^2 - 3x + 5$ est définie pour $x = 2$, car elle prend alors la valeur $2^2 - 3.2 + 5 = 3$.

La fonction $y = \dfrac{x+1}{x-3}$ qui est définie pour $x = 2$ (alors $y = -3$) ne l'est plus pour $x = 3$, valeur pour laquelle le dénominateur est nul et où d'après le n° 66, y tend vers l'infini.

Une fonction est dite définie dans un intervalle (a, b) *lorsqu'elle est définie pour toutes les valeurs de* x *comprises dans cet intervalle.* Ainsi la fonction $y = \sqrt{9 - x^2}$ est définie pour toute valeur de x comprise dans l'intervalle $-3 \leqslant x \leqslant 3$ où la fonction placée sous le radical est positive ou nulle.

Une fonction algébrique peut cesser d'être définie :

a) *lorsque, dans une fraction rationnelle, son dénominateur s'annule.*

Ainsi la fraction $y = \dfrac{2x-5}{x-1}$ n'est plus définie pour $x = 1$;

b) *lorsque, dans un radical d'indice pair, la fonction sous le radical devient négative.*

Ainsi la fonction $y = \sqrt{x^2 - 4}$ cesse d'être définie pour :
$$-2 < x < 2.$$

77. ACCROISSEMENT D'UNE VARIABLE. — *On appelle accroissement d'une variable qui passe d'une valeur à une autre, l'excès de la seconde valeur sur la première.*

Cet accroissement peut être positif ou négatif (il n'a donc pas le sens d'augmentation).

Soit $f(x)$ une fonction définie dans un intervalle (a, b) et soient x_1 et x_2, deux valeurs dans cet intervalle.

Si x passe de la valeur x_1 à la valeur x_2, la fonction passe de la valeur $f(x_1)$ à la valeur $f(x_2)$.

$x_2 - x_1 = h$ représente l'accroissement de la variable indépendante x,

$f(x_2) - f(x_1) = k$ représente l'accroissement correspondant de la fonction.

Cet accroissement de la fonction peut s'écrire :

$$f(x_1 + h) - f(x_1) = k.$$

Exemple : Soit la fonction $y = x^2 - 5x + 2$.

Donnons successivement à x les valeurs 1 et 7/5.

Pour $x = 1, \quad y = -2$

$$x = \frac{7}{5}, \quad y = -\frac{76}{25}.$$

L'accroissement de la variable est $\frac{7}{5} - 1 = \frac{2}{5}$;

l'accroissement correspondant de la fonction est $-\frac{76}{25} - (-2) = -\frac{26}{25}$.

78. FONCTION CONTINUE ET FONCTION DISCONTINUE.

Une fonction $y = f(x)$ est dite continue pour une certaine valeur x_1 de la variable si :

1° elle est définie pour cette valeur de la variable ;

2° l'accroissement de la fonction $f(x_1 + h) - f(x_1)$ correspondant à un accroissement h de la variable tend vers zéro en même temps que h.

Une fonction $f(x)$ est continue dans un intervalle (a, b) si elle est continue pour toute valeur de x prise dans cet intervalle.

Lorsqu'une fonction est continue pour toutes les valeurs de la variable, la courbe représentative est formée d'un trait continu.

Une fonction qui n'est pas continue pour une valeur donnée de la variable, soit qu'elle cesse d'être définie, soit que les accroissements de la variable et de la fonction ne tendent pas simultanément vers zéro, est dite discontinue pour cette valeur.

Exemple : Soit la fonction $y = \frac{1}{x}$.

Donnons à x un accroissement h ; y prend l'accroissement k et l'on a :

$$k = \frac{1}{x + h} - \frac{1}{x} = \frac{-h}{x(x + h)}.$$

a) Si $x \neq 0$, h peut être pris assez petit pour que $x + h$ ne soit pas nul ; alors, quelle que soit la valeur de $x (\neq 0)$, k sera nul en même temps que h.

b) Si $x = 0$, quelle que soit la valeur de h, le dénominateur est nul et k est très grand par rapport à h. Pour $x = 0$, la fonction est discontinue.

On démontre que :

1° *Une fonction entière est continue pour toute valeur de la variable.*

Soit la fonction $y = x^2 + 3x - 9$.

Lorsque x prend les valeurs x_1 et $x_1 + h$ on a :

$$y_1 = x_1^2 + 3x_1 - 9$$

$$y_1 + k = (x_1 + h)^2 + 3(x_1 + h) - 9 ;$$

d'où : $$k = 2x_1h + h^2 + 3h = h[2x_1 + 3 + h].$$

Le terme entre parenthèses reste fini, k tend vers zéro en même temps que h.

2° *Une fraction rationnelle est continue pour toutes les valeurs de la variable qui n'annulent pas le dénominateur.*

3° *Une fonction irrationnelle est continue pour toutes les valeurs de la variable qui rendent positives les fonctions placées sous un radical d'indice pair.*

En général une fonction est continue pour les valeurs de x pour lesquelles elle est définie.

79. FONCTION CROISSANTE ET FONCTION DÉCROISSANTE.

Soit $y = f(x)$ une fonction définie dans un intervalle (a, b).

Soient, dans cet intervalle (a, b) deux valeurs très voisines x_1 et x_2 de la variable, telles que :

$$x_2 - x_1 = h.$$

Les valeurs correspondantes de y,

$$y_1 = f(x_1) \quad \text{et} \quad y_2 = f(x_2)$$

donnent :

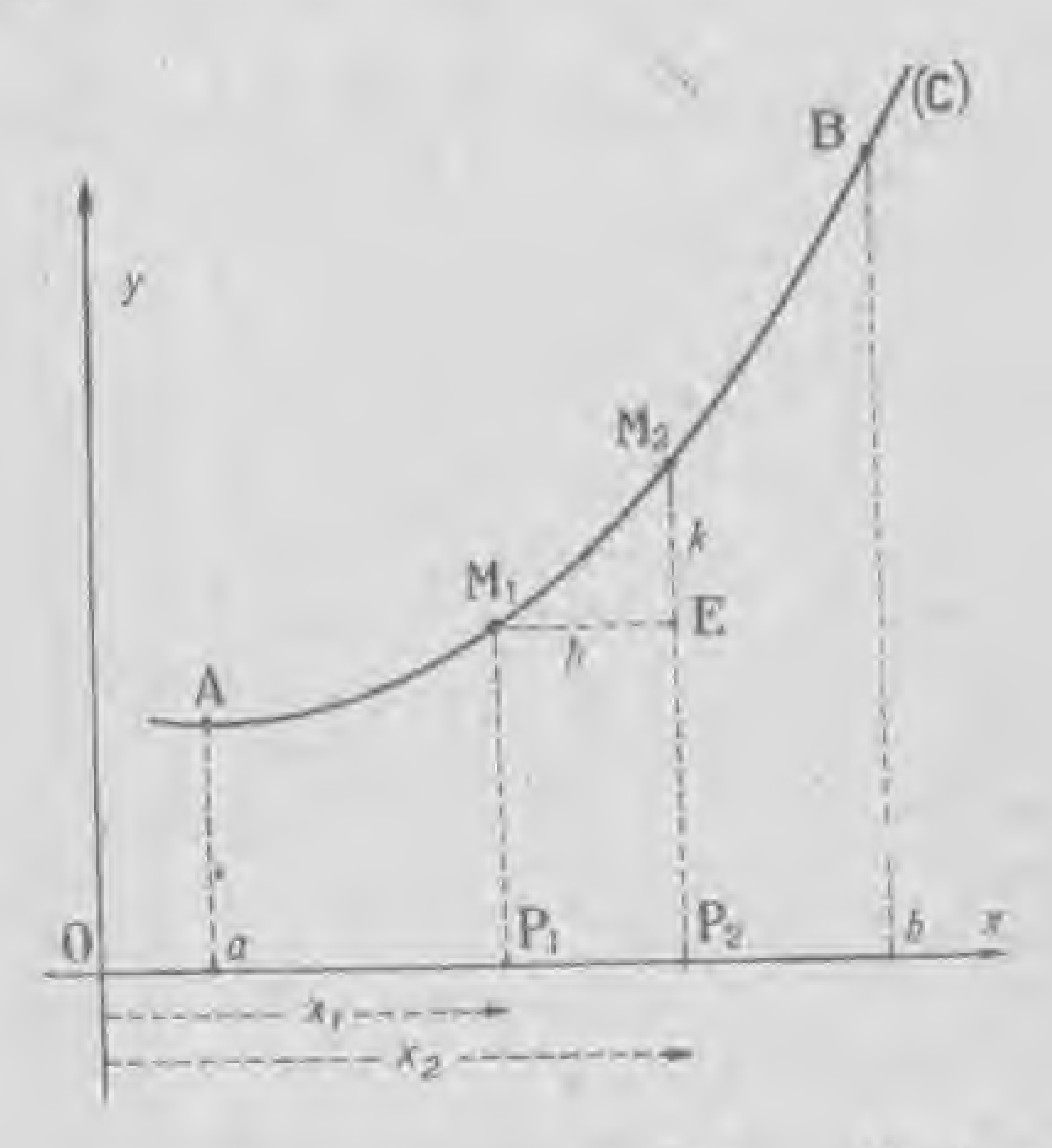
$$k = f(x_2) - f(x_1).$$

La fonction est dite croissante si le rapport $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ***est positif quelles que soient les valeurs de*** x_1 ***et de*** x_2 ***prises dans l'intervalle (a, b).***

Dans ce cas, la fonction varie dans le même sens que la variable; si la variable augmente, la fonction augmente; si la variable diminue, la fonction diminue.

Ainsi la longueur d'une tige est fonction croissante de la température; la résistance de l'air sur un mobile est fonction croissante de sa vitesse.

Soient (C) la courbe représentative d'une telle fonction, dans l'intervalle (a, b), M_1 et M_2 les points de cette courbe d'abscisses x_1 et x_2. Si $x_2 > x_1$, on a $f(x_2) > f(x_1)$, et la courbe a l'aspect ci-dessous :

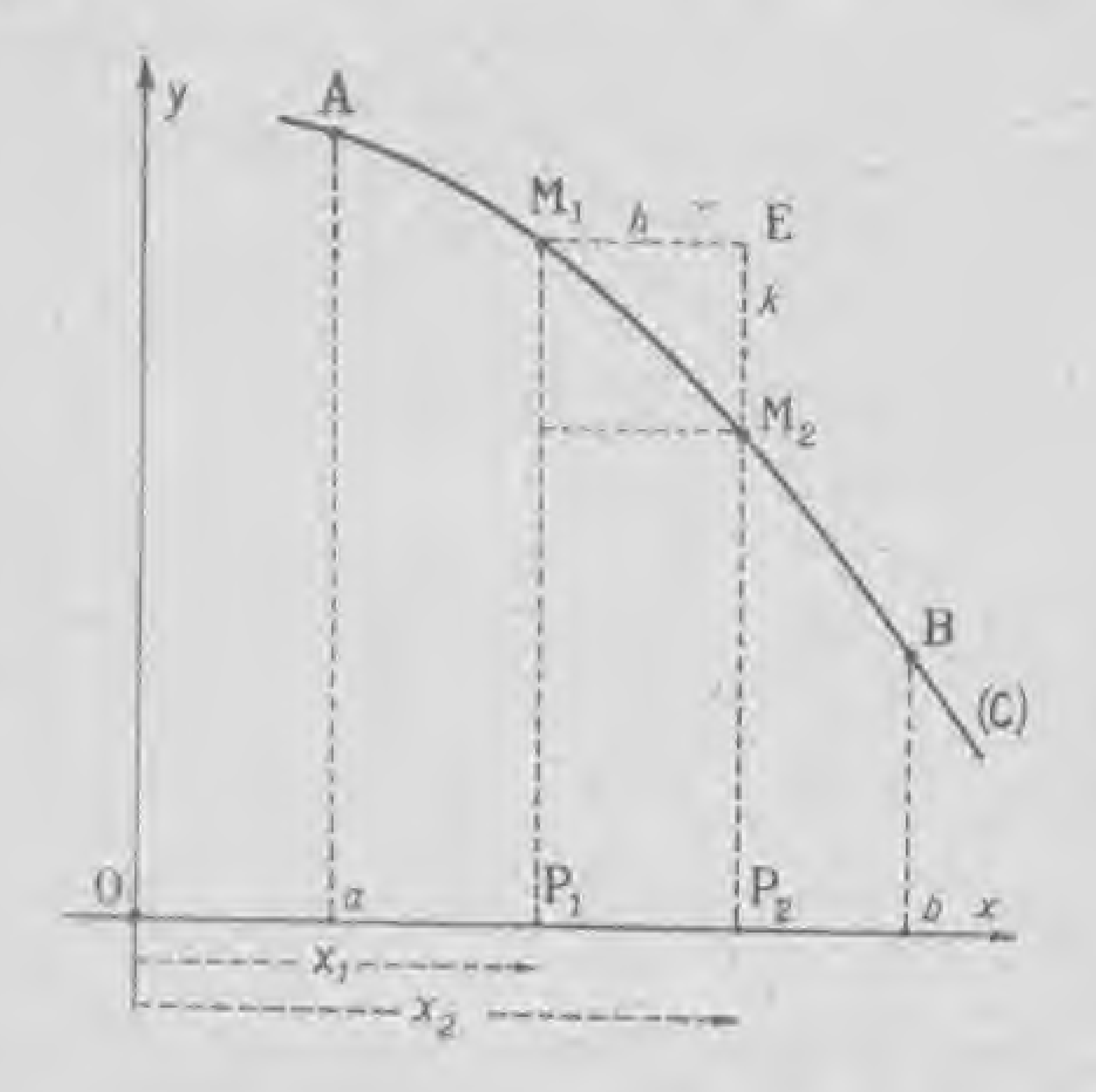


Si au contraire, le rapport $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ***est négatif pour toutes valeurs*** x_1 ***et*** x_2 ***prises dans l'intervalle a, b, la fonction est dite décroissante dans l'intervalle a, b.***

La fonction varie en sens inverse de la variable; si la variable augmente, la fonction diminue; si la variable diminue, la fonction augmente.

Ainsi, dans un triangle d'aire constante, la base est fonction décroissante de la hauteur.

Soient C la courbe représentative d'une telle fonction dans l'intervalle (a, b), M_1 et M_2 les points de cette courbe d'abscisses x_1 et x_2. Si $x_2 > x_1$, on a $f(x_2) < f(x_1)$ la courbe a l'aspect ci-dessous :



Une fonction est dite monotone *dans un intervalle si dans cet intervalle, elle reste ou constamment croissante ou constamment décroissante.*

Étudier le sens de variation d'une fonction, c'est rechercher les intervalles dans lesquelles cette fonction est croissante ou décroissante.

80. MAXIMUM OU MINIMUM.

Lorsqu'une fonction variant d'une manière continue, cesse de croître pour commencer à décroître, on dit qu'elle passe par un maximum, c'est-à-dire par une valeur plus grande que celles qui la précèdent ou qui la suivent immédiatement.

Si, au contraire, elle cesse de décroître pour commencer à croître, elle passe par un minimum, c'est-à-dire par une valeur plus petite que celles qui la précèdent ou qui la suivent immédiatement.

Soit la fonction : $y = -x^2 + 4x$.

On peut l'écrire sous la forme :

$$y = 4 - (x - 2)^2.$$

On voit que toutes les valeurs de y s'obtiennent en retranchant de 4 une valeur positive ; y est donc toujours inférieur à 4, sauf pour $x = 2$ où $y = 4$.

4 est donc une valeur maximum de y. Elle est atteinte pour $x = 2$.

Pour toute autre valeur de x voisine de 2 :

$$x = 2 \pm h.$$
$$y = 4 - h^2$$

valeur inférieure à 4.

Fig. 17.

On a donc le tableau suivant de variation où l'on a ajouté les valeurs correspondant à x ou y nuls.

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	0	↗	4 (max)	↘	0	↘	$-\infty$

On utilisera, pour l'étude d'une variation de fonction, la marche suivante :

81. MARCHE A SUIVRE POUR L'ÉTUDE D'UNE VARIATION DE FONCTION.

Pour étudier la variation d'une fonction $y = f(x)$:

1° déterminer les intervalles dans lesquels la fonction est définie et continue ;

2° chercher le sens de variation de la fonction dans chacun des intervalles de continuité ;

3° chercher les valeurs remarquables que peut prendre la fonction : valeur limite pour $x = \pm\infty$, valeur nulle, maximum, minimum ;

4° former un tableau résumant ces résultats ;

5° tracer la courbe représentative.

Ainsi, pour la fonction $y = -x^2 + 4x$, on obtient le résultat du numéro 80 ci-dessus.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE

Valeurs limites

Trouver les valeurs limites des expressions suivantes :

286. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}$ pour $x = 2$.

287. $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2}$ pour $x = 1$

288 $y = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 6x + 5}$ pour $x = 1$.

289 $y = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^3 - 3x + 2}$ pour $x = 1$

290. $y = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 8x + 15}$ pour $x = 5$.

291. $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$ pour $x = 2$.

292. $y = \dfrac{x^4 - 6x^2 + 8x - 3}{x^2 - 3x + 2}$ pour $x = 1$.

293. $y = \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{4x^3 + 16x^2 - 19x + 5}$ pour $x = \dfrac{1}{2}$.

294. $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{3x^3 - 18x^2 + 36x - 24}$ pour $x = 2$.

295. $y = \dfrac{8x^3 + 2x^2 - 5x + 1}{8x^3 + 10x^2 - 11x + 2}$ pour $x = \dfrac{1}{2}$.

296. $y = \dfrac{4x^3 - 13x^2 + 11x - 2}{8x^3 - 22x^2 + 13x - 2}$ pour $x = 2$.

297. $y = \dfrac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{x^4 - 2x^3 + x^2}$ pour $x = 1$.

298. $y = \dfrac{x^5 + x^3 - 8x^2 - 8}{x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x}$ pour $x = 2$.

299. $y = \dfrac{x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8}{x^3 - 4x^2 + 4x}$ pour $x = 2$.

300. $y = \dfrac{75x^4 + 140x^3 - 223x^2 + 92x - 12}{45x^4 - 93x^3 + 65x^2 - 19x + 2}$ pour $x = \dfrac{2}{5}$ et $x = \dfrac{1}{3}$.

301. $y = \dfrac{x^5 - 2x^4 + x - 2}{x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8}$ pour $x = 2$.

302. $y = \dfrac{2x^5 - 21x^4 + 68x^3 - 84x^2 + 32x}{2x^5 - 14x^4 + 31x^3 - 24x^2 + 12x - 16}$ pour $x = 2$.

303. $y = \dfrac{x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - 4x - 4}$ pour $x = 1$.

304. $y = \dfrac{x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3}{x^7 - 3x^6 + 3x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 6x + 6}$ pour $x = 1$.

305. $y = \dfrac{x + 3 + \dfrac{x+1}{x-2}}{x + \dfrac{x^2}{x-2}}$ pour $x = 2$.

306. $y = \dfrac{x^2 + \dfrac{x+1}{x-3}}{2x + 1 + \dfrac{x^2}{x-3}}$ pour $x = 3$.

307. $y = \dfrac{x+6}{x^2-16} - \dfrac{x+1}{x(x-4)}$ pour $x = 4$.

308. $y = \dfrac{x-12}{x^2+2x-8} - \dfrac{x^2+1}{3(x^2-5x+6)}$ pour $x = 2$.

309. $y = \dfrac{7-2x}{x^2-x-2} - \dfrac{1}{x^2-3x+2}$ pour $x = 2$.

310. $y = \dfrac{4x^2+3}{x^2(x^2+x-6)} - \dfrac{x-1}{x^2-6x+8}$ pour $x = 2$.

311. $y = \dfrac{-3x}{x+2}$ pour $x = \pm\infty$.

312. $y = \dfrac{5x-1}{3x+2}$ pour $x = \pm\infty$.

313. $y = \dfrac{2x+3}{x-5}$ pour $x = \pm\infty$.

314. $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ pour $x = \pm\infty$.

315. $y = \dfrac{a}{mx+n}$ pour $x = \pm\infty$

316. $y = \dfrac{5x-1}{x^3+2}$ pour $x = \pm\infty$.

317. $y = \dfrac{5x^3-8x^2+2x-5}{2x^3-3x^2+2}$ pour $x = \pm\infty$.

318. $y = \dfrac{5x^3-8x^2+2x-5}{3x^2-2x+1}$ pour $x = \pm\infty$.

Représentation graphique d'une fonction

319. Dans une journée d'été, le baromètre et le thermomètre ont donné les indications suivantes :

	6 h	8 h	10 h	midi	2 h	4 h	6 h
Pression	766	766	764	762	760	760	762.
Température	22°	24°	30°	32°	34°	34°	32°.

Représenter graphiquement : 1° les variations de la pression ; 2° les variations de la température de 6 heures du matin à 6 heures du soir.

320. Représenter graphiquement les variations de la température d'un malade d'après les observations suivantes :

	1er j	2e j	3e j	4e j	5e j	6e j	7e j
matin	37°	37°,5	38°	38°,5	39°	39°	37°,2.
soir	38°	38°,5	39°	39°,2	39°,5	38°,5	36°8,.

321. Faire le graphique des ventes d'un commerçant d'après les chiffres suivants : lundi, 8 500 francs ; mardi, 6 500 francs ; mercredi, 7 000 francs ; jeudi, 15 000 francs ; vendredi, 8 000 francs ; samedi, 21 000 francs.

322. Sur du papier quadrillé choisir deux droites rectangulaires $x'x$, $y'y$ comme axes de coordonnées et déterminer les points suivants ; puis par le calcul trouver la longueur des droites qui joignent les deux points :

1° A(2, 4) ; B(3, 5). 3° E(— 3, 5) ; F(— 4, — 6).
2° C(5, 1) ; D(1, 7). 4° G(— 2, 1) ; H(— 1, — 1).

323. Quelles figures géométriques forme-t-on en joignant les points suivants :

1° A(2, 6) ; B(— 5, 6) ; C(— 5, — 1) ; D(2, — 1).
2° A(1, 1) ; B(— 2, 1) ; C(— 2,— 7) ; D(1, — 7).

Combien chaque figure contient-elle de petits carrés de côté 1 ?

224. Déterminer les points suivants :

1° (3, — 5), (3, 8), (3, 0), (3, — 2).
2° (— 7, — 1), (7, — 1), (2, — 1), (— 5, — 1).

Caractériser les lignes obtenues en joignant les points de chaque série.

325. 1° Tracer deux axes rectangulaires $x'x$ $y'y$ et marquer, dans le plan de ces axes, les points

A(— 3, — 1), B(— 1, 3), C(4, 1), D(3, — 2), E(— 2, — 4).

2° Calculer les longueurs des côtés AB, BC, CD et les coordonnées du point I au milieu de BE.

326. Étant donnés deux axes rectangulaires $x'x$, $y'y$ et un point A(— 2,6), déterminer les coordonnées :

1° du point A', symétrique de A par rapport à une parallèle à $x'x$ passant par B(0, — 1) ;

2° du point A" symétrique de A par rapport à une parallèle à $y'y$ passant par C(4,0) ;

3° du point A"', symétrique de A par rapport au point I (3,4).

327. Soit $x'x$, $y'y$, un système d'axes rectangulaires. Par rapport à ce système, les points A, B, C ont pour coordonnées :

$$A(x_1 = -3,\ y_1 = 2),\ B(x_2 = 7,\ y_2 = -6),\ C(x_3 = -8,\ y_3 = 3).$$

Trouver les coordonnées de ces points par rapport à un deuxième système d'axes, X'X et Y'Y, parallèles aux premiers, de même sens et passant par le point O'(— 5, — 4).

328. 1° On donne dans le plan des coordonnées, le point M(5,7). Par ce point on mène une perpendiculaire à l'axe $x'Ox$ et on la prolonge au-dessous de cet axe d'une longueur égale ; on obtient ainsi le point M' dont on demande de déterminer les coordonnées.

2° Déterminer de même les coordonnées du point M" obtenu en procédant d'une façon analogue relativement à l'axe $y'Oy$.

3° Exprimer les distances de l'origine des coordonnées aux points M, M' et M". Quelle est la longueur de la droite M'M" ?

4° Quelle est l'équation du cercle qui passe par les points M, M' et M" ?

329. Déterminer sur la bissectrice de l'angle xOy de deux axes rectangulaires $x'Ox$ et $y'Oy$ le point qui a pour abscisse 4. De même déterminer le point de la bissectrice de l'angle $x'Oy$ qui a pour ordonnée 7. Quelle est la distance qui sépare ces deux points ?

CHAPITRE IV

ÉTUDE DES FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

§ I. FONCTION DU PREMIER DEGRÉ.

82. ÉTUDE DE LA FONCTION DU PREMIER DEGRÉ.

La fonction du premier degré est de la forme

$$y = ax + b$$

où a et b sont des constantes données et x la variable indépendante.

a) **Continuité de la fonction.**

A chaque valeur de x correspond une valeur bien déterminée de y.

La fonction est définie pour toute valeur de x.

Soit une valeur quelconque x_1 de x

$$y_1 = ax_1 + b\,;$$

donnons à x à partir de cette valeur, un certain accroissement h ; y prend un accroissement k et

$$y_1 + k = a(x_1 + h) + b\,;$$

d'où :

$$k = ah.$$

Lorsque h tend vers zéro, k tend aussi vers zéro, quelle que soit la valeur de x.

La fonction du premier degré est donc continue pour toute valeur de x. *On peut donc faire varier x de $-\infty$ à $+\infty$.*

b) **Sens de variation de la fonction.**

Si l'on donne à x deux valeurs quelconques x_1 et x_2, il leur correspond les valeurs y_1 et y_2 telles que :

$$y_1 = ax_1 + b$$

et :

$$y_2 = ax_2 + b\,;$$

d'où :

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1),$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a.$$

Ce rapport reste constant, il est toujours du signe de a, quelles que soient les valeurs x_1 et x_2 considérées.

La fonction du premier degré varie donc toujours dans le même sens :

elle est constamment croissante, si a > 0,

elle est constamment décroissante, si a < 0.

c) Valeurs remarquables. $a > 0$.

Pour $x = \pm \infty$, y est du signe de ax, donc de x et $y = \pm \infty$.

Pour $x = -\frac{b}{a}$, $y = 0$.

On peut construire le tableau suivant :

x	$-\infty$	↗	$-\frac{b}{a}$	↗	$+\infty$
y	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

$a < 0$

Pour $x = \pm \infty$, y est du signe de ax, donc $y = \mp \infty$

$$x = -\frac{b}{a},\ y = 0.$$

On peut construire le tableau suivant :

x	$-\infty$	↗	$-\frac{b}{a}$	↗	$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

d) Représentation graphique. — ***La courbe représentative de la fonction $y = ax + b$ est une droite.***

1° $a \neq 0$.

La courbe cherchée coupe l'axe Ox en un point A ; l'abscisse de ce point correspond à la valeur $-\frac{b}{a}$ de x qui annule y. Les coordonnées de A sont donc :

$$x_0 = \overline{OA} = -\frac{b}{a}; \quad y_0 = 0.$$

De même, la courbe cherchée coupe l'axe Oy au point B dont l'abscisse est nulle. Les coordonnées de B sont donc :

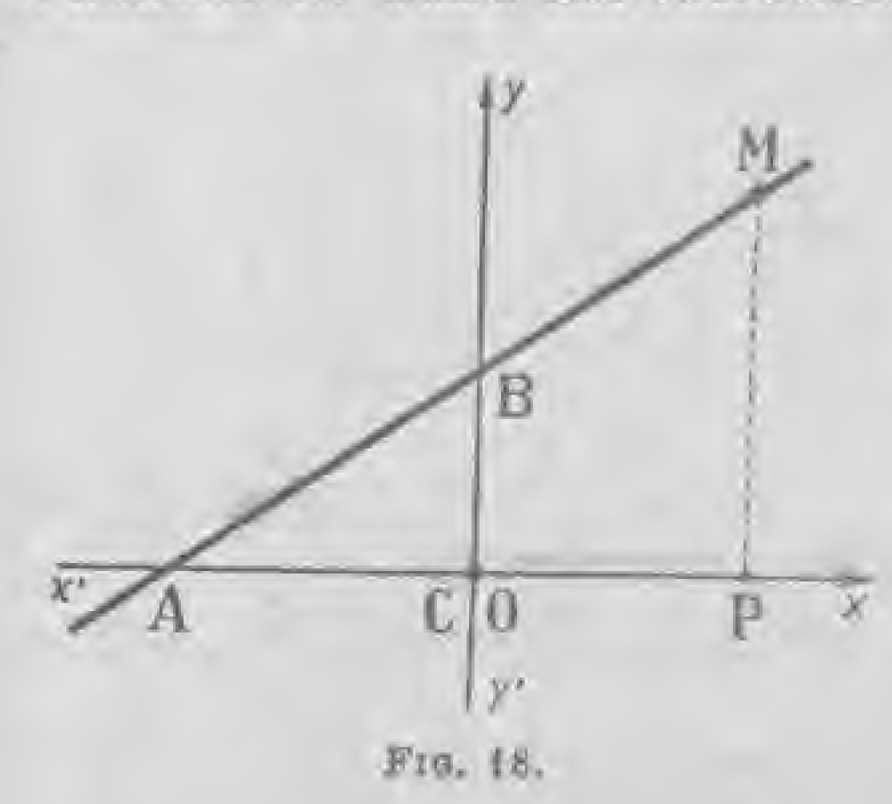


Fig. 18.

$$x_1 = 0, \quad y_1 = \overline{OB} = b.$$

Soit M le point courant ou variable de la courbe, de coordonnées

$$\overline{OP} = x, \quad \overline{PM} = y = ax + b.$$

Le triangle rectangle AOB est tel que :

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{OB}}{-\overline{OA}} = \frac{b}{+\frac{b}{a}} = a.$$

De même, le triangle rectangle APM est tel que :

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{OP} - \overline{OA}} = \frac{y}{x + b/a} = \frac{ax + b}{(ax + b)} . a = a.$$

On a donc :

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{AP}} = a.$$

Les triangles rectangles APM et AOB sont donc semblables. Les côtés AB et AM font avec l'axe Ox des angles égaux et les point A, B et M sont alignés.

Cette propriété ayant lieu quel que soit le point M, la courbe représentative de la fonction de premier degré est bien une droite.

On peut noter, en utilisant les relations trigonométriques du triangle rectangle :

$$\text{tg}\ \widehat{OAB} = \frac{\overline{OB}}{\overline{AO}} = a\,;$$

$$\text{tg}\ \widehat{PAM} = \frac{\overline{PM}}{\overline{AP}} = a\,;$$

les deux angles $\widehat{OAB}$ et $\widehat{PAM}$ ayant même tangente sont égaux à $k\pi$ près et les points A, B, M sont alignés.

2° $a = 0$. Alors :

$$y = b$$

et garde une valeur constante.

Tous les points de la courbe représentative ayant même ordonnée sont situés sur une parallèle à Ox qui coupe l'axe Oy en B tel que $\overline{OB} = b$.

Fig. 19.

Remarque. — La relation la plus générale du premier degré entre x et y est de la forme :

$$Ax + By + C = 0.$$

Si $B \neq 0$, elle peut s'écrire :

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B};$$

et en posant : $-\frac{A}{B} = a, -\frac{C}{B} = b,$

on retrouve la forme précédente : $y = ax + b$

Si $B = 0$, la relation se réduit à :

$$Ax + C = 0\,;$$

ou, si $A \neq 0$, $x = -\frac{C}{A} = C^{te}$.

Tous les points de la courbe représentative ont alors même abscisse et sont situés sur une parallèle à l'axe Oy, coupent Ox en A tel que :

$$\overline{OA} = -\frac{C}{A}.$$

§ II. DE LA DROITE.

83. ÉQUATION D'UNE DROITE.

L'équation d'une droite est une relation du premier degré entre les coordonnées du point courant de cette droite.

1er Cas. — La droite est parallèle à l'axe Ox.

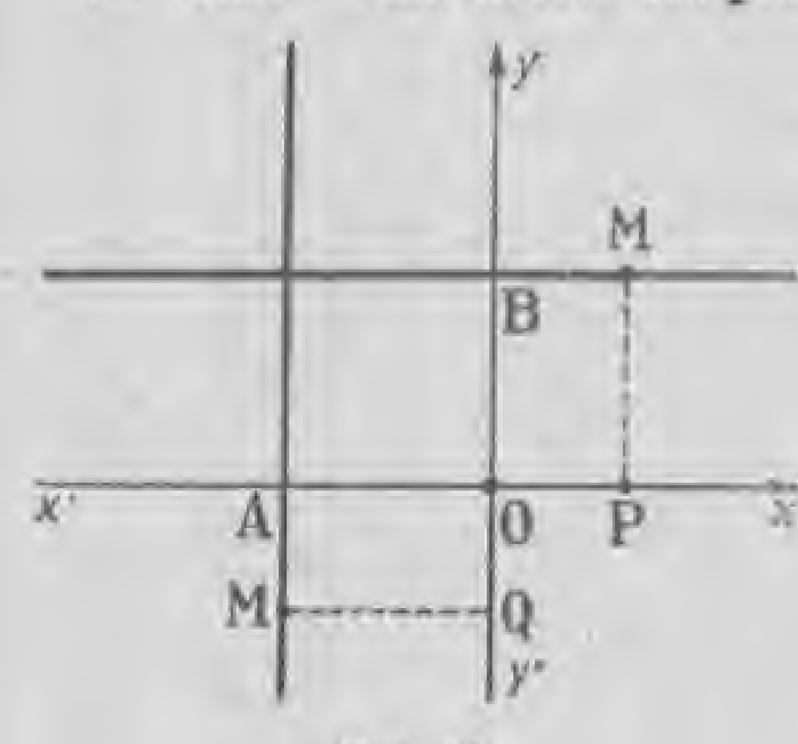


Fig. 20.

Tous les points de la droite ont alors même ordonnée celle du point B où la droite coupe l'axe Oy. L'équation de la droite sera donc :

$$y = \overline{OB} = b.$$

2e Cas. — La droite est parallèle à l'axe Oy.

Tous les points de la droite ont alors même abscisse celle du point A où la droite coupe l'axe Ox, et son équation est :

$$x = \overline{OA} = a.$$

3e Cas. — La droite est quelconque.

Elle est alors définie, si l'on connaît ses deux points de rencontre A et B avec les axes.

Soient : $\overline{OB} = b$, $\overline{OA} = c$ et $M(x, y)$ un point courant de la droite :

Les triangles semblables AOB et APM donnent :

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{OP} - \overline{OA}}{-\overline{OA}};$$

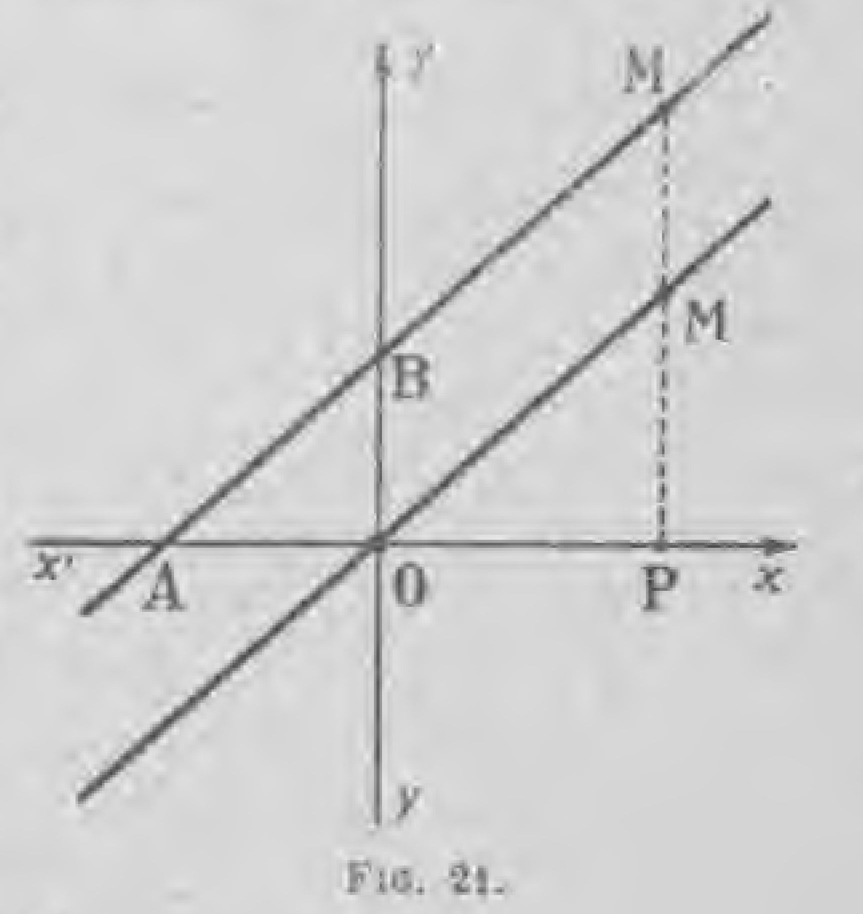


Fig. 21.

et, en remplaçant par les valeurs :

$$\frac{y}{b} = \frac{x - c}{-c} \quad \text{ou} \quad y = -\frac{bx}{c} + b.$$

Si l'on pose $-\frac{b}{c} = a$, on a :

$$y = ax + b$$

qui est bien une relation du premier degré.

Remarques :

1° Le rapport $a = -\frac{b}{c} = \frac{\overline{OB}}{\overline{AO}}$ reste le même quand la droite se déplace parallèlement à elle-même, car les triangles AOB restent alors semblables, il ne dépend donc que de l'angle fait par la droite (D) avec l'axe Ox ; c'est le coefficient angulaire de la droite.

La distance $\overline{OB} = b$ de l'origine au point où la droite coupe l'axe Oy est l'ordonnée à l'origine.

2° *Si la droite passe par l'origine*, cette ordonnée est nulle et l'équation de la droite se réduit à :

$$y = ax.$$

3° Les relations trigonométriques du triangle rectangle permettent d'écrire en appelant α l'angle de la droite avec la direction Ox :

$$tg\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{AO}} = -\frac{b}{c} = a.$$

Le coefficient angulaire n'est autre que la tangente de l'angle que fait la droite avec la direction positive de l'axe des abscisses.

4° Construction d'une droite donnée par son équation.

Une droite étant donnée par son équation, on peut pour la construire : soit déterminer sa direction et un point ; soit donner deux points.

Exemples. — *Construire la droite d'équation* $2y + 3 = 0$.

C'est une droite parallèle à l'axe Ox d'ordonnée à l'origine $-\frac{3}{2}$.

2° *Construire la droite d'équation* $4x + 5 = 0$.

C'est une droite parallèle à l'axe Oy coupant Ox en E tel que :

$$\overline{OE} = -\frac{5}{4}.$$

3° *Construire la droite d'équation* $2y - 3x = 0$.

Cette droite passe par l'origine puisque son équation est vérifiée pour $x = 0$, $y = 0$.

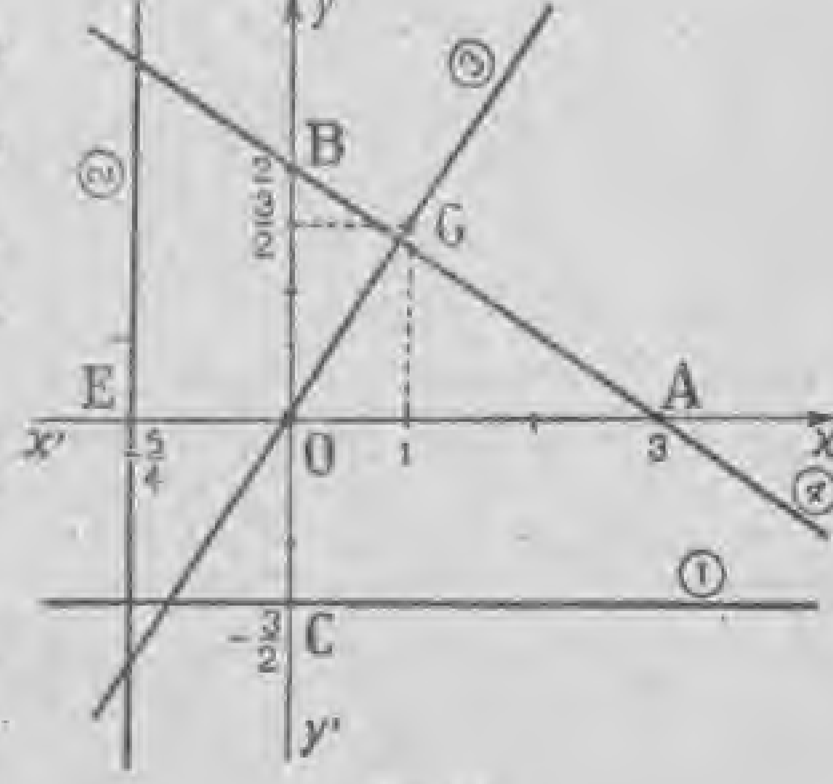


Fig. 22.

Elle passe aussi par le point $G\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

4° *Construire la droite d'équation* $3y + 2x - 6 = 0$.
Cette droite passe par les points $A(x = +3, y = 0)$ et $B(x = 0\ y = 2)$.

FORMES PARTICULIÈRES DE L'ÉQUATION DE LA DROITE

84. ÉQUATION D'UNE DROITE PASSANT PAR UN POINT DONNÉ $M_0(x_0, y_0)$.

Pour que la droite d'équation : $y = ax + b$ passe par le point $M_0(x_0, y_0)$ il faut que les coordonnées de ce point vérifient l'équation de la droite ou que :

$$y_0 = ax_0 + b.$$

En retranchant l'une de l'autre ces deux équations, on obtient la forme générale de l'équation d'une droite passant par un point donné :

$$y - y_0 = a\,(x - x_0) \qquad (1)$$

où a est arbitraire.

85. ÉQUATION D'UNE DROITE DE COEFFICIENT ANGULAIRE DONNÉ m.

Il suffit de remplacer a par m dans l'équation générale

$$y = mx + b. \qquad (2)$$

où b est arbitraire.

Exemple. — Si la droite fait avec l'axe Ox un angle de 45°, le triangle AOB est isocèle $\overline{AO} = \overline{OB}$ et $a = 1$, d'après le n° 83.

Toutes les droites parallèles à la première bissectrice Oz (celle de l'angle xOy) auront donc pour coefficient angulaire 1 et leur équation sera la forme : $y = x + b$.

L'équation de Oz sera :

$$y = x.$$

Si la droite fait avec l'axe Ox un angle de 135° le triangle A'OB' est encore isocèle mais $\overline{OA'} = \overline{OB'}$ et $a = -1$.

Fig. 23.

Les droites parallèles à la seconde bissectrice Oz' (celle de l'angle $x'Oy$) *auront pour coefficient angulaire* -1 *et seront de la forme :*

$$y = -x + b.$$

L'équation de Oz' sera :

$$y = -x.$$

86. ÉQUATION D'UNE DROITE DE COEFFICIENT ANGULAIRE DONNÉ m ET PASSANT PAR UN POINT DONNÉ.

Elle s'écrit immédiatement en combinant (1) et (2).

$$y - y_0 = m\,(x - x_0). \qquad (3)$$

87. ÉQUATION D'UNE DROITE PASSANT PAR 2 POINTS DONNÉS $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$.

La forme générale de l'équation de la droite est :

$$y = ax + b. \qquad (1)$$

La droite devant passer par les points M_1 et M_2, l'équation doit être vérifiée par les couples de valeurs $(x_1\ y_1)$ et (x_2, y_2).

et

$$y_1 = ax_1 + b, \qquad (2)$$

$$y_2 = ax_2 + b. \qquad (3)$$

Si l'on retranche (2) de (1) et de (3), on a :

$$y - y_1 = a\,(x - x_1),$$

$$y_2 - y_1 = a\,(x_2 - x_1)$$

ce qui donne le rapport :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (4)$$

Cas particulier. — *Les points donnés sont les points de rencontre avec les axes* $A(p, o)$ *et* $B(o, q)$.

En remplaçant dans la formule précédente (x_1, y_1) par (p, o) et (x_2, y_2) par (o, q), on aura :

$$\frac{y}{q} = \frac{x - p}{-p} = -\frac{x}{p} + 1\,;$$

ou :

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1. \qquad (3)$$

Remarque. — En résolvant en y l'équation (4) on trouve :

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,x_1 + y_1$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,x + \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2 - x_1}.$$

On voit que le coefficient angulaire d'une droite passant par deux points donnés M_1 et M_2 est égal à :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

88. CONDITIONS D'ORTHOGONALITÉ DE DEUX DROITES.

Soient les deux droites rectangulaires d'équations :

$$y = ax + b\,;$$

et $$y = a'x + b'.$$

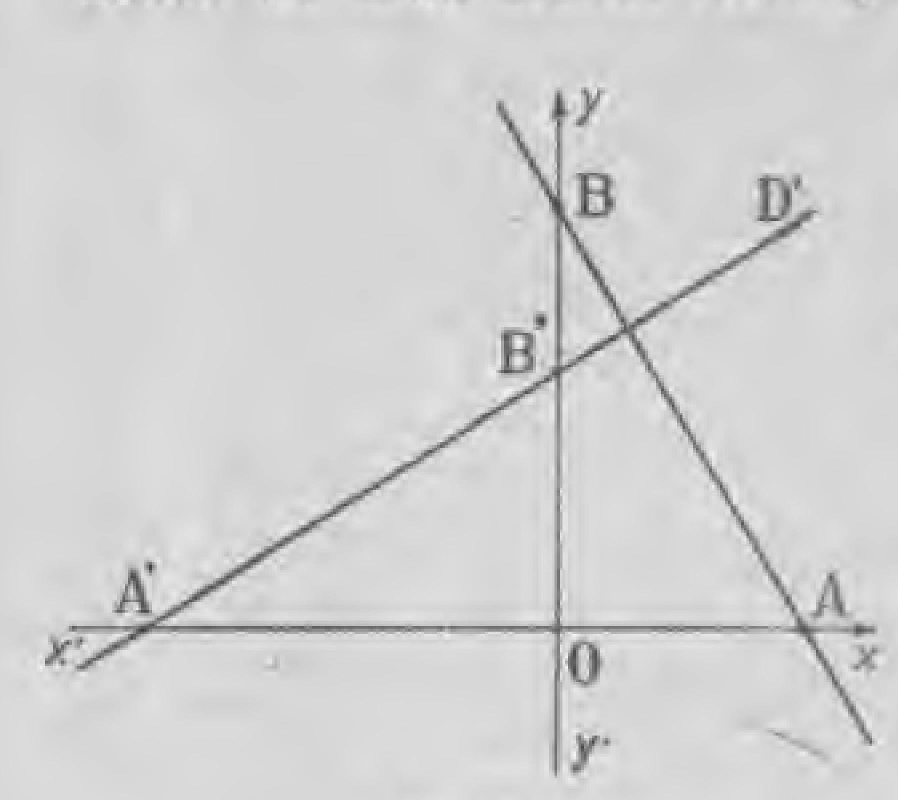


FIG. 24.

Les triangles OAB et OA'B' sont semblables comme ayant les côtés perpendiculaires et :

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'O}}{\overline{OB'}}\,;$$

or $$\frac{\overline{OB}}{OA} = -\frac{\overline{OB}}{\overline{AO}} = -a$$

et $$\frac{\overline{A'O}}{\overline{OB'}} = \frac{1}{a'}.$$

Les deux droites seront donc rectangulaires si

$$a = -\frac{1}{a'}, \qquad \frac{1}{a'} = -a$$

c'est-à-dire si les deux coefficients angulaires sont inverses et de signes contraires

ou $$aa' = -1.$$

Corollaire. — *Équation de la perpendiculaire abaissée d'un point* $M_0(x_0\ y_0)$ *sur une droite* $y = ax + b$.

Cette droite passant par le point $M_0(x_0\ y_0)$, son équation est de la forme : $y - y_0 = m\,(x - x_0)$.

Comme elle doit être perpendiculaire à la droite D, son coefficient angulaire sera $-\frac{1}{a}$.

Son équation est donc

$$y - y_0 = -\frac{1}{a}\,(x - x_0).$$

Remarque. — Si les droites sont données sous la forme :

$$Ax + By + C = 0$$
$$A'x + B'y + C' = 0$$

leurs coefficients angulaires sont $-\frac{A}{B}$ et $-\frac{A'}{B'}$.

Les conditions de parallélisme seront donc :

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'} \quad \text{ou} \quad \frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$$

celles d'orthogonalité seront :

$$-\frac{A}{B} \times -\frac{A'}{B'} = -1 \quad \text{ou} \quad \mathbf{AA' + BB' = 0.}$$

89. FAMILLE DE DROITES. — ***Dans le cas ou les coefficients a, b, c, dépendent d'un seul paramètre m, on dit que l'équation :***

$$ax + by = c,$$

représente une famille de droites.

Ainsi, par exemple, l'équation :

$$y - 2 = m\,(x - 1) \quad \text{ou} \quad y = mx - m + 2,$$

représente l'ensemble des droites qui passent par le point (1, 2) et dont le coefficient angulaire m est indéterminé.

Application — *Démontrer que la droite :*

$$mx + 2y = m - 1,$$

passe par un point fixe quelle que soit la valeur de m *et trouver les coordonnées de ce point.*

Soient x_0 et y_0 les coordonnées de ce point ; la relation

$$mx_0 + 2y_0 = m - 1,$$

ou $$m(x_0 - 1) + 2y_0 + 1 = 0,$$

doit être vérifiée quelle que soit la valeur donnée à m, c'est donc une identité en m. Il faut pour cela que les coefficients du binôme en m du premier membre soient nuls, c'est-à-dire que l'on ait :

$$x_0 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad 2y_0 + 1 = 0,$$

ou $$x_0 = 1 \quad \text{et} \quad y_0 = -\frac{1}{2}.$$

Les droites passent donc par le point fixe $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$.

§ III. FONCTIONS $y = x^2$ ET $y = ax^2$.

90. FONCTION $y = x^2$.

Cette fonction est parfaitement définie pour toute valeur de x.

Continuité de la fonction.

Si l'on donne à x une certaine valeur x_1, y prend la valeur y_1 telle que $$y_1 = x_1^2\,;$$

si l'on donne à x à partir de x_1 un certain accroissement h, y prend un certain accroissement k tel que

$$y_1 + k = (x_1 + h)^2$$

en sorte que : $k = 2x_1h + h^2 = h\,(2x_1 + h)$.

$2x_1 + h$ gardant une valeur finie, k tend vers zéro en même temps que h; *La fonction* $y = x^2$ *est donc continue quel que soit* x.

Sens de variation. — Aux deux valeurs x_1 et x_2 de la variable

correspondent les valeurs $y_1 = x_1^2$ et $y_2 = x_2^2$ de la fonction.

On a : $$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1.$$

Divisons l'intervalle de variation de x en deux parties.

a) $-\infty < x < 0$;

Si les deux valeurs de x sont prises dans cet intervalle, le rapport $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ est négatif ; ***pour $x < 0$, la fonction $y = x^2$ est décroissante.***

b) $0 < x < +\infty$.

Si les deux valeurs de x sont prises dans cet intervalle, le rapport $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ est positif ; ***donc, pour $x > 0$, la fonction $y = x^2$ est croissante.***

Valeurs remarquables.

La fonction $y = x^2$ qui cesse de décroître pour croître quand x s'annule en passant du négatif au positif, présente donc un minimum nul pour $x = 0$.

Pour $x = \pm \infty$, y toujours positif égale $+\infty$.

La variation de la fonction peut se résumer dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Le graphique s'obtiendra en portant sur les axes les coordonnées d'un certain nombre de points satisfaisant à la relation $y = x^2$.

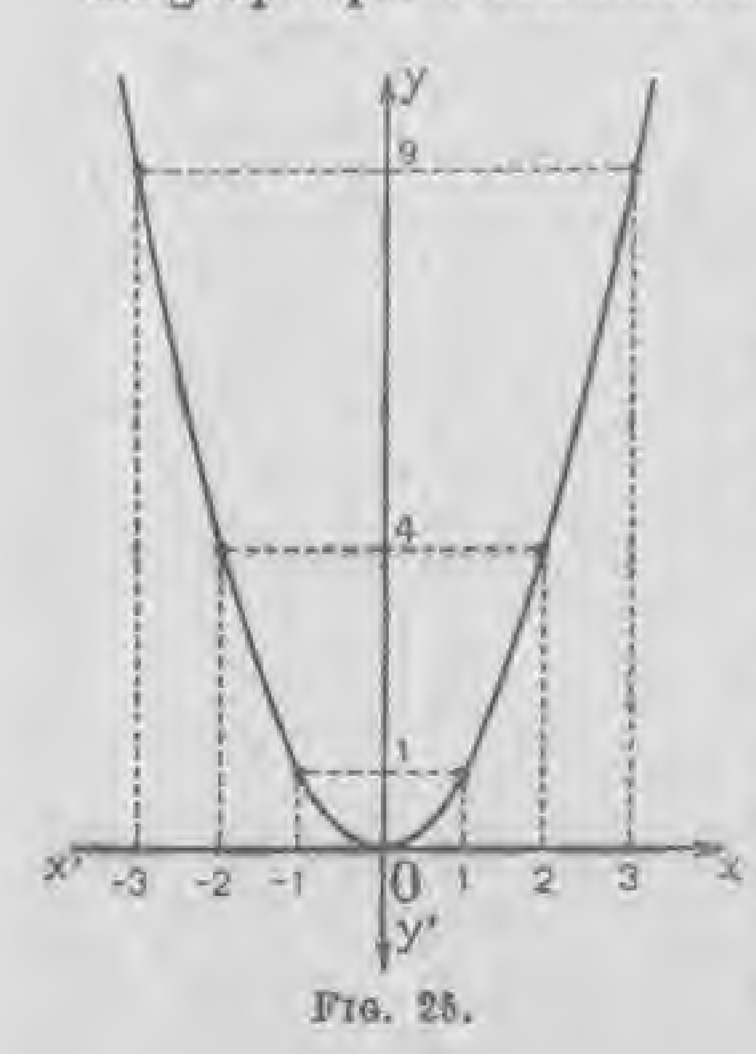


Fig. 25.

On obtient le graphique ci-contre.

Symétrie de la courbe.

Si l'on donne à x deux valeurs égales en valeur absolue et de signes contraires $+h$ et $-h$, y prend la même valeur :

$$y = h^2.$$

Les points correspondants M et M' de la courbe ayant même ordonnée sont situés sur une même parallèle à Ox (fig. 26) et comme $\overline{OP} = -\overline{OP'}$, ou $\overline{QM} = -\overline{QM'}$ le point Q est le milieu de MM'.

Les points M et M' sont donc symétriques par rapport à l'axe Oy. Cette propriété reste vraie pour toute valeur de h, donc quelle que soit la position de M.

A tout point $M(x, y)$ situé sur la courbe $y = x^2$ correspond sur cette même courbe un point $M'(-x, y)$ symétrique du premier par rapport à l'axe Oy.

On exprime ce fait en disant ***que la courbe $y = x^2$ admet l'axe Oy comme axe de symétrie.***

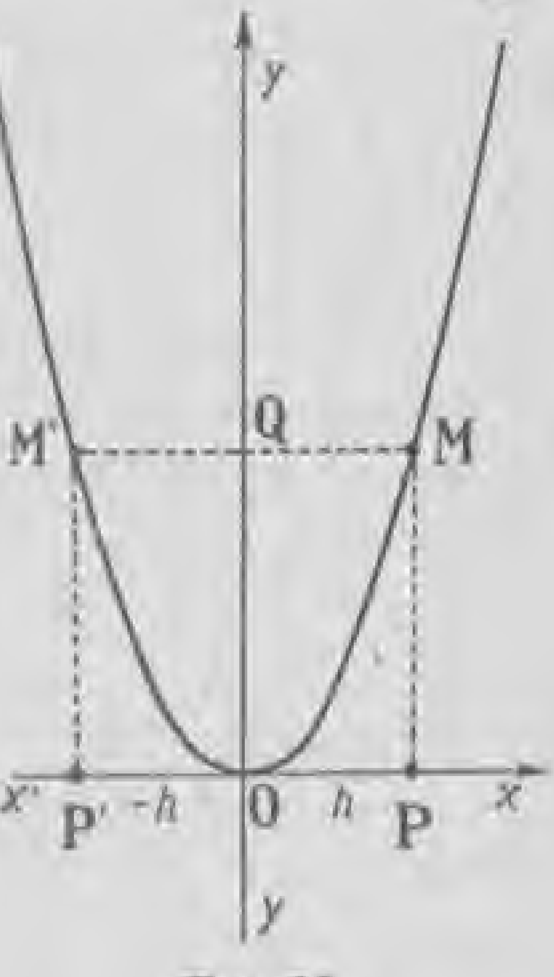


Fig. 26.

Remarque. — De la relation entre le sens de variation de x et celui de y, on peut déduire la remarque :

Si on élève une fonction au carré, la nouvelle fonction varie dans le même sens que la précédente si celle-ci est positive et dans le sens contraire si elle est négative.

91. FONCTION $y = ax^2$.

Soit à étudier la fonction $y = ax^2$ où a est une constante donnée.

Continuité. — Comme la fonction $y = x^2$, *la fonction* $y = ax^2$ *est définie pour toute valeur de* x.

Si l'on donne à x une valeur x_1, la valeur correspondante de y est : $$y_1 = ax_1^2.$$

Si l'on donne à x un accroissement h, y prend un accroissement k et : $$y_1 + k = a(x_1 + h)^2 ;$$
d'où : $$k = a[(x_1 + h)^2 - x_1^2] = 2ax_1h + ah^2$$
$$= h[2ax_1 + ah]$$
qui tend vers zéro, en même temps que h.

La fonction $y = ax^2$ *est donc continue pour toute valeur de* x.

Sens de variation. — Soient deux valeurs x_2 et x_1 de x et les valeurs correspondantes de y : $y_1 = ax_1^2$,
$$y_2 = ax_2^2 ;$$
d'où : $$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{a[x_2^2 - x_1^2]}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1)$$

Il faut distinguer deux cas :

92. *α)* ***Premier cas : $a > 0$.***

Comme pour la fonction $y = x^2$, coupons l'intervalle de variation de x en deux parties.

$-\infty < x < 0$. Si les deux valeurs de x, x_1 et x_2 sont prises dans cet intervalle on a : $x_1 + x_2 < 0$ et $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1) < 0$.

La fonction est décroissante dans cet intervalle.

$0 < x < +\infty$. Si les deux valeurs de x sont prises dans cet intervalle on a : $x_1 + x_2 > 0$ et $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1) > 0$.

La fonction est croissante dans cet intervalle.

Valeurs remarquables. — ***La fonction $y = ax^2$ $(a > 0)$ cessant de décroître pour croître quand x s'annule en passant du négatif au positif, la fonction y présente un minimum nul pour $x = 0$.***

Pour $x = \pm\infty$, $y = +\infty$.

La variation peut se résumer dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

On peut construire une courbe comme précédemment en prenant différents points.

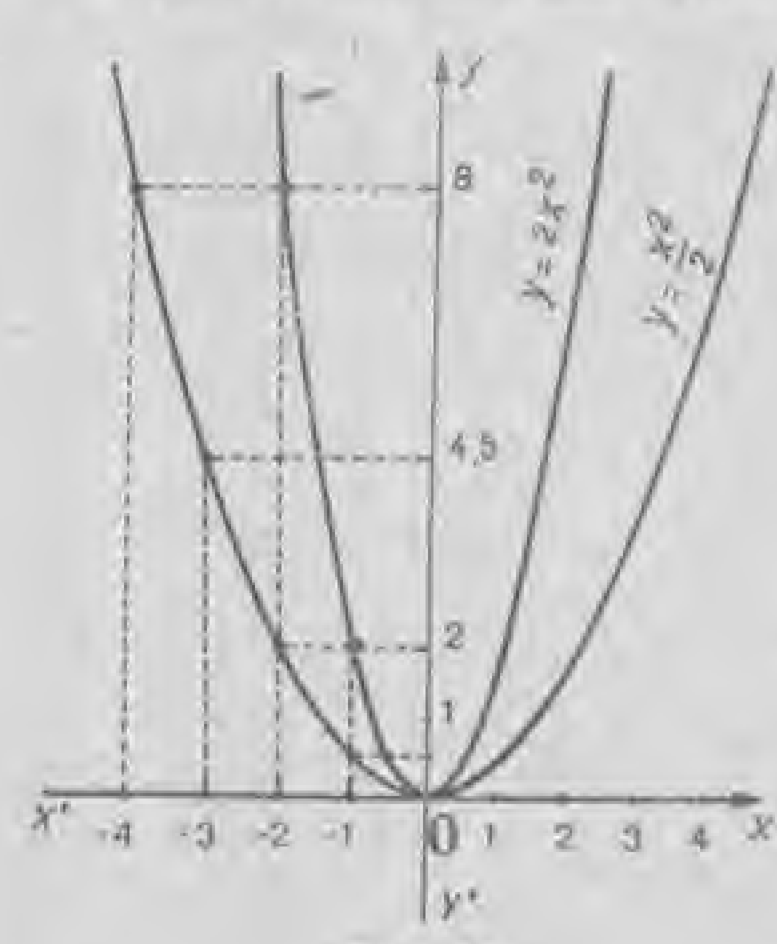


FIG. 27.

Les courbes ci-contre ont été construites pour $a = 2$ et $a = \frac{1}{2}$.

(La courbe est de même forme que la courbe $y = x^2$ mais elle est d'autant plus évasée que a est plus petit.)

y prenant la même valeur quand on donne à x des valeurs opposées, les points correspondants seront symétriques par rapport à l'axe Oy.

La courbe $y = ax^2$ admet l'axe Oy comme axe de symétrie.

93. β) *Deuxième cas : $a < 0$.*

Séparons encore l'intervalle de variation en deux parties.

$-\infty < x < 0$. — Si les deux valeurs de x sont prises dans cet intervalle le rapport $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a(x_1 + x_2)$ est positif et la *fonction est croissante dans cet intervalle.*

$0 < x < +\infty$. — Si les deux valeurs x_1 et x_2 sont prises dans cet intervalle le rapport $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ est négatif et la *fonction est décroissante dans cet intervalle.*

Valeurs remarquables. — ***La fonction $y = ax^2$ $(a < 0)$, cesse de croître pour décroître quand x s'annule en passant du négatif au positif ; elle présente donc un maximum nul pour $x = 0$.***

Pour $x = \pm\infty$, y toujours négatif égale $-\infty$.

La variation peut se résumer dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

Le graphique se construirait de la même façon.

Les graphiques ci-contre sont construits pour $a = -2$ et $a = -1/2$.

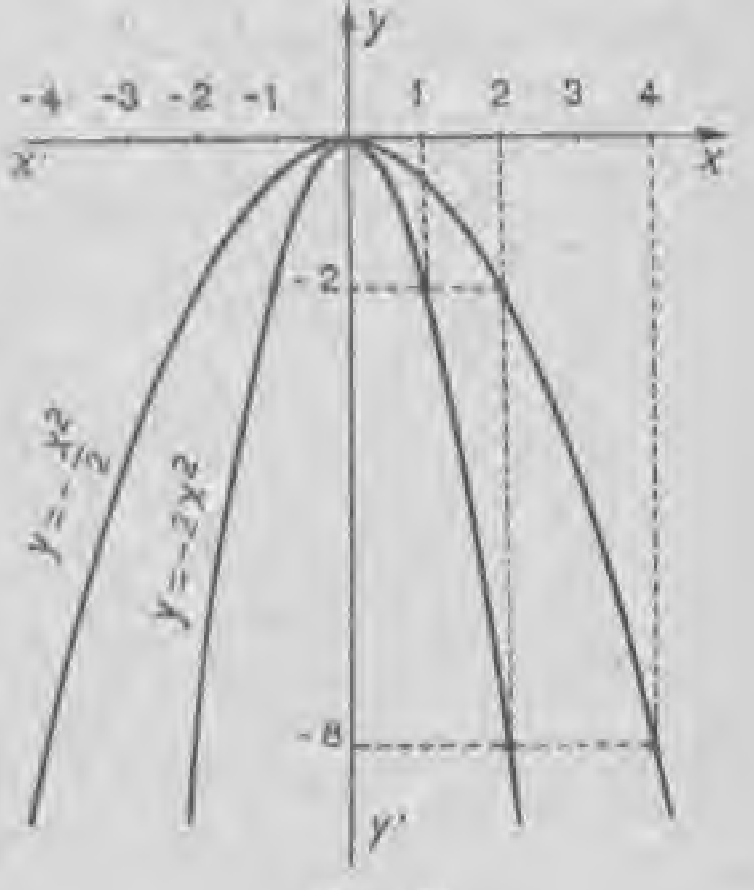


FIG. 28.

La valeur de y étant la même pour deux valeurs opposées de x, ***la courbe possède encore l'axe Oy comme axe de symétrie.***

γ) Cas particulier. $a = 0$. $y = 0$ quel que soit x. La courbe se réduit à l'axe Ox.

Remarque. — Cette étude permet de constater que :

si on multiplie une fonction par une constante, la nouvelle fonction varie dans le même sens que la précédente si cette constante est positive et dans le sens contraire si cette constante est négative.

§ IV. FONCTIONS $y = \frac{1}{x}$ ET $y = \frac{a}{x}$.

94. FONCTION $y = \frac{1}{x}$.

Continuité. — On a vu (nº 78) que cette fonction cesse d'être définie pour $x = 0$.

Si l'on donne à x une valeur x_1, y prend la valeur $y_1 = \frac{1}{x_1}$.

Si l'on donne à x l'accroissement h à partir de x_1, y prend l'accroissement k et :

$$y_1 + k = \frac{1}{x_1 + h} ;$$

d'où :

$$k = \frac{1}{x_1 + h} - \frac{1}{x_1} = -\frac{h}{x_1(x_1 + h)}.$$

Si $x_1 \neq 0$, la fraction $-\frac{h}{x_1(x_1 + h)}$ tend vers zéro en même temps que h.

Si $x_1 = 0$, la fraction $\frac{h}{x_1(x_1+h)}$ ayant un dénominateur nul est infiniment grande par rapport à h, la fonction cesse d'être continue.

Donc, *la fonction* $y = \frac{1}{x}$ *est continue pour toute valeur de* x *différente de zéro.*

On étudiera donc la variation dans les deux intervalles de continuité :

$$-\infty \quad -\varepsilon \quad et \quad +\varepsilon \quad +\infty$$

ε étant une quantité positive aussi voisine que l'on veut de 0, mais ne l'égalant pas.

Sens de variation. — Soient x_1 et x_2 deux valeurs de x et les valeurs correspondantes y_1 et y_2 de y : $y_1 = \frac{1}{x_1}$, $y_2 = \frac{1}{x_2}$.

On a :
$$y_2 - y_1 = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}$$

et :
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{x_1 x_2}.$$

Si l'on prend les deux valeurs de x dans l'intervalle $(-\infty, -\varepsilon)$ x_1x_2 est > 0, le rapport $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ est négatif et la fonction est décroissante dans cet intervalle

Si l'on prend les deux valeurs de x dans l'intervalle $(\varepsilon, +\infty)$, x_1x_2 est > 0, le rapport $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ est encore négatif et la fonction est décroissante dans ce second intervalle.

La fonction $y = \frac{1}{x}$ ***est donc constamment décroissante dans ses intervalles de continuité.***

Valeurs remarquables.

Lorsque x tend vers zéro par valeurs positives, y tend vers $+\infty$.
Lorsque x tend vers zéro par valeurs négatives, y tend vers $-\infty$.
Lorsque x tend vers $-\infty$, y tend vers zéro par valeurs négatives.
Lorsque x tend vers $+\infty$, y tend vers zéro par valeurs positives.
La variation peut se résumer dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	↗	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	↗	$+\infty$
y	0	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	0

95. Graphique. — On peut construire le graphique par points comme précédemment.

Lorsque x tend vers 0, la distance d'un point de la courbe

à l'axe Oy mesuré par une abscisse $\overline{OP} = \overline{QM} = x$ tend vers zéro tandis que son ordonnée augmente indéfiniment. La courbe se rapproche donc indéfiniment de Oy.

La droite Oy est asymptote à la courbe.

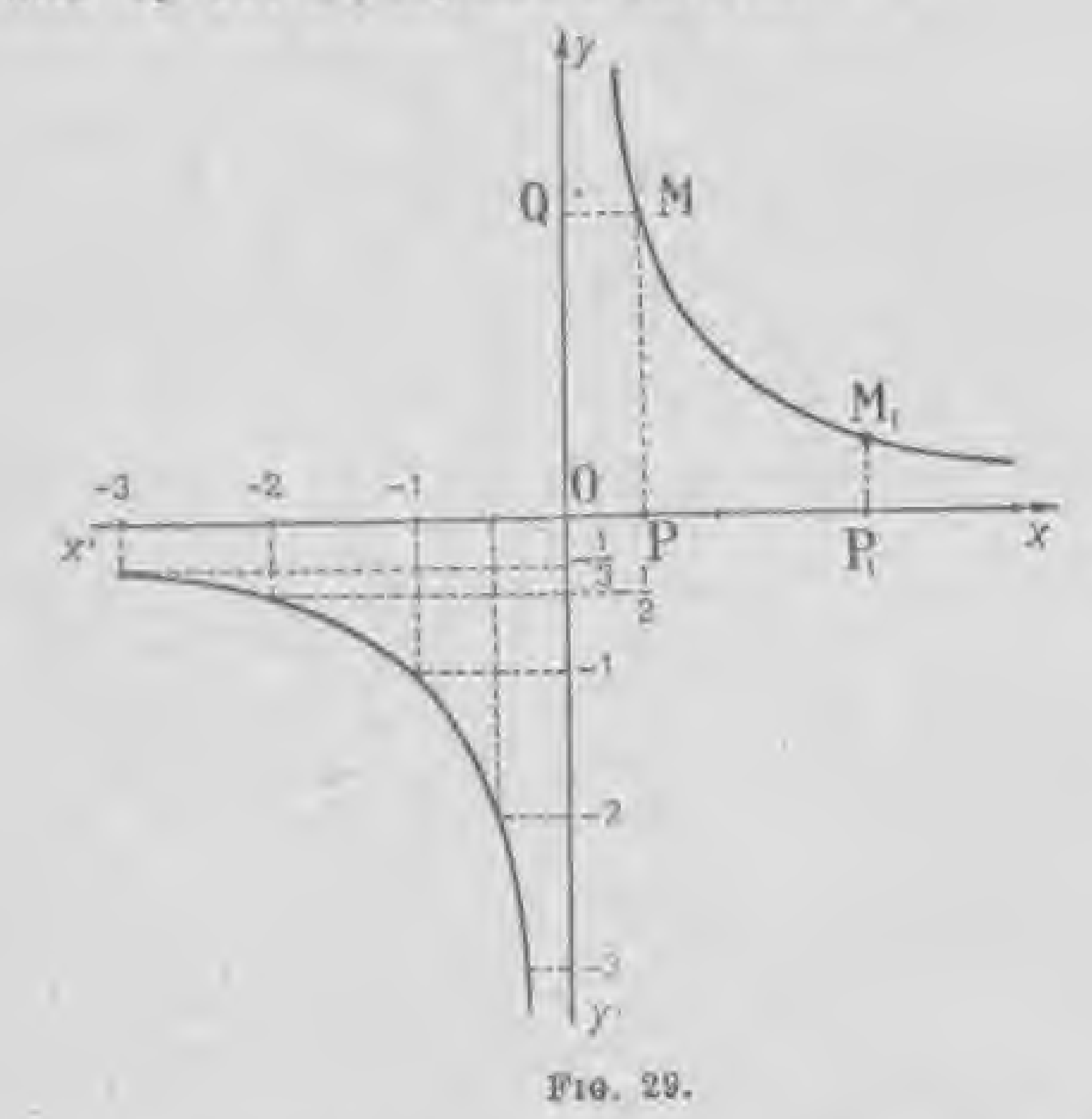


Fig. 29.

De même, lorsque x augmente indéfiniment la distance d'un point M_1 à l'axe Ox mesurée par l'ordonnée $\overline{P_1M_1} = y$ tend vers zéro, la courbe se rapproche donc indéfiniment de la droite.

La droite Ox est asymptote à la courbe.

96. Symétrie de la courbe.

Considérons deux points M_1 et M_2 tels que l'abscisse de l'un soit égale à l'ordonnée de l'autre et réciproquement ;

$$x_1 = y_2, \quad x_2 = y_1.$$

Les deux triangles OP_1M_1 et OQ_2M_2 sont donc égaux et :

$$OM_1 = OM_2$$
$$\widehat{P_1OM_1} = \widehat{M_2OQ_2}.$$

La bissectrice Oz de l'angle xOy est aussi bissectrice de l'angle $\widehat{M_1OM_2}$ et médiatrice de la base du triangle isocèle OM_1M_2.

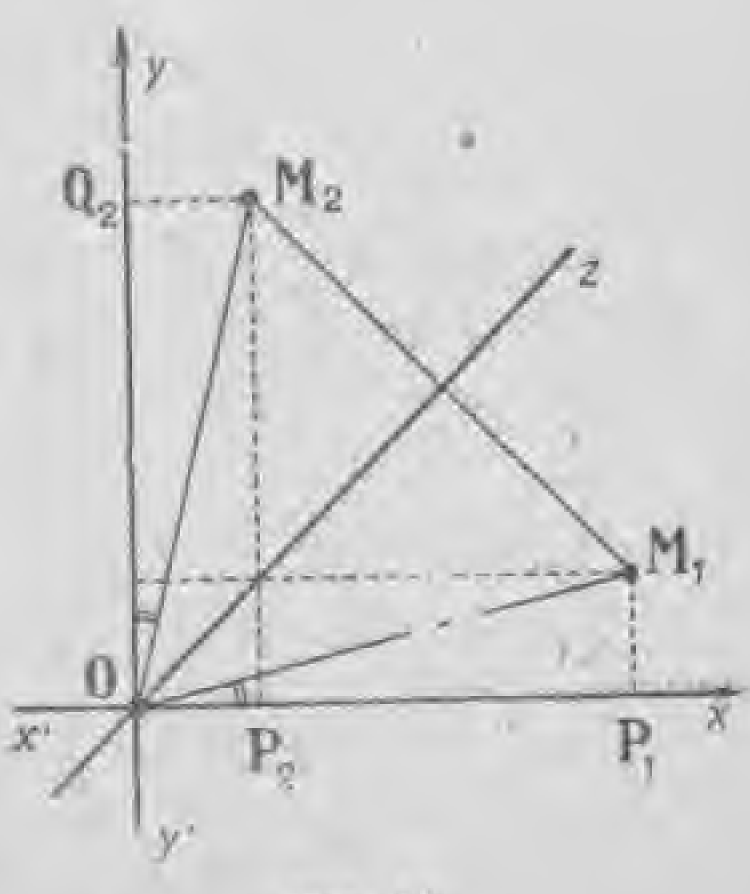


Fig. 30.

M_1 et M_2 sont donc symétriques par rapport à Oz.

Or, si l'un des points M_1 est sur la courbe $y = \frac{1}{x}$, $(x_1y_1 = 1)$, il en sera de même du point $M_2(x_2y_2 = y_1x_1 = 1)$.

A tout point M_1 de la courbe, on peut par conséquent faire correspondre, sur la courbe, *un point M_2 symétrique de M par rapport à Oz.*

La courbe admet l'axe Oz comme axe de symétrie.

Soient deux points M_1 et M_3 tels que l'abscisse de l'un égale l'ordonnée de l'autre changée de signe et réciproquement ;

$$x_3 = -y_1, \quad y_3 = -x_1.$$

Les deux triangles OP_1M_1 et OQ_3M_3 sont égaux et

$$OM_3 = OM_1$$
$$\widehat{P_1OM_1} = \widehat{Q_3OM_3}.$$

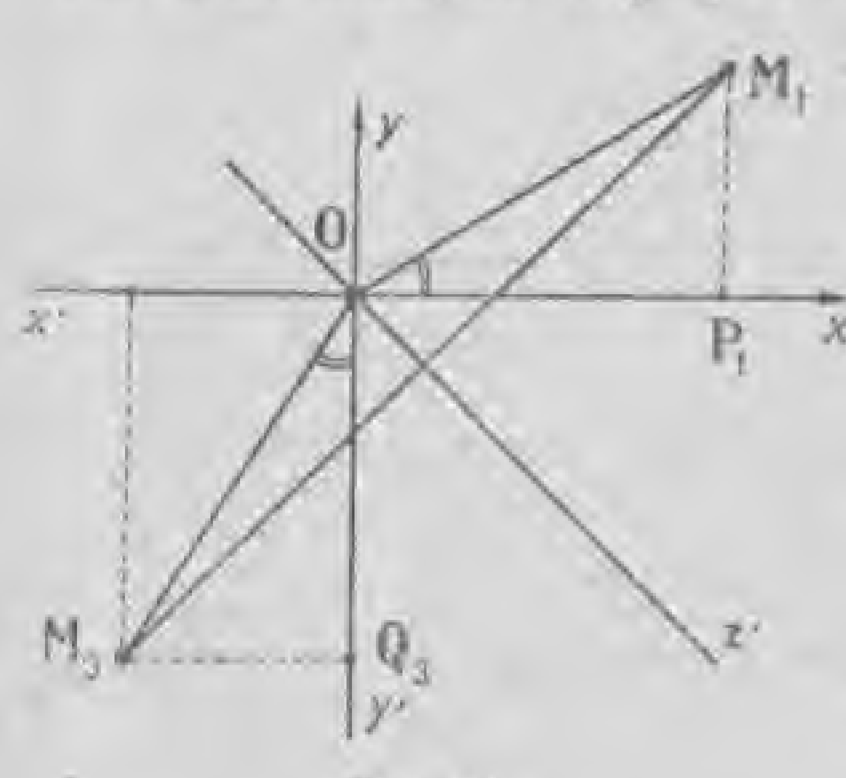


Fig. 31.

La bissectrice Oz′ de l'angle xOy' est aussi bissectrice de l'angle $\widehat{M_1OM_3}$ et par suite médiatrice du côté M_1M_3.

M_1 et M_3 sont donc symétriques par rapport à Oz′.

Or, si le point M_1 est sur la courbe $y = \frac{1}{x}$ $(x_1y_1 = 1)$ il en est de même de M_3 car :

$$x_3y_3 = (-y_1)(-x_1) = x_1y_1 = 1.$$

A tout point M_1 *de la courbe on peut faire correspondre* sur la courbe *son symétrique* M_3 *par rapport à l'axe Oz′.*

La courbe admet l'axe Oz′ comme axe de symétrie.

Soient deux points $M_1(x_1, y_1)$ et $M_4(x_4, y_4)$ dont les coordonnées sont opposées

$x_4 = -x_1 \quad y_4 = -y_1.$

Les triangles OP_1M_1 et OP_4M_4 sont égaux,

$$OM_1 = OM_4$$
$$\widehat{P_1OM_1} = \widehat{P_4OM_4}$$

et O est au milieu du segment M_1M_4 ; les points M_1 et M_4 sont symétriques par rapport à O.

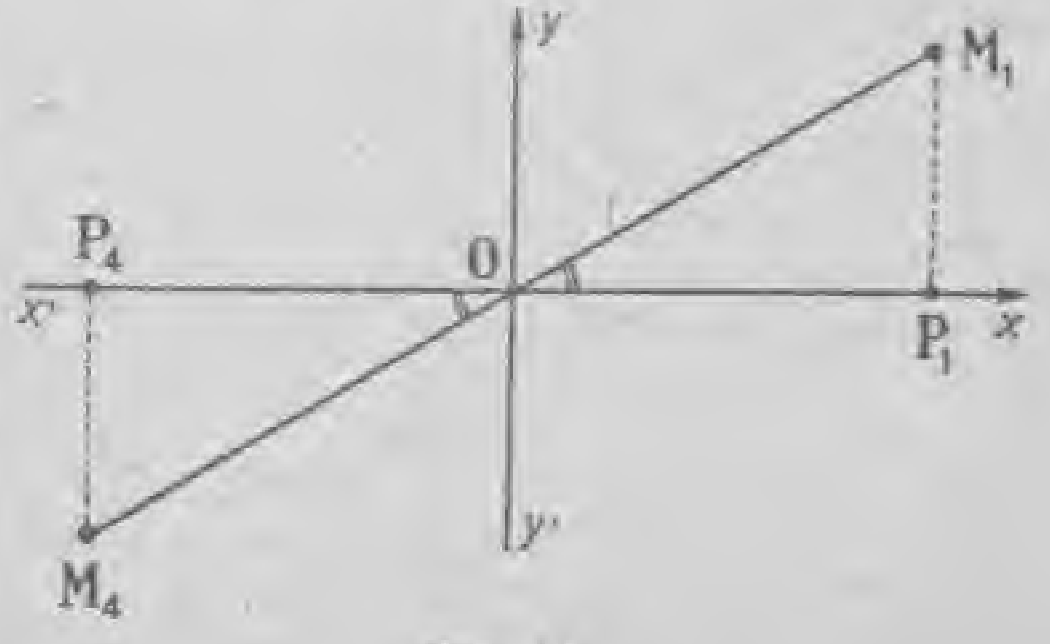


Fig. 32.

Or si le point M_1 est sur la courbe $y = \frac{1}{x}$, $(x_1y_1 = 1)$ il en est de même de M_4 car $x_4y_4 = (-x_1)(-y_1) = x_1y_1 = 1$.

A tout point de la courbe on peut faire correspondre sur la courbe *son symétrique par rapport à O.*

Le point O est donc centre de symétrie de la courbe.

La courbe $y = \frac{1}{x}$ admet donc deux axes de symétrie rectangulaires, les bissectrices de l'angle des asymptotes, et un centre de symétrie, le point de concours de ces asymptotes.

Remarque. — Il résulte de l'étude de la fonction $y = \frac{1}{x}$, que la fonction inverse d'une fonction donnée varie en sens contraire de cette fonction.

97. FONCTION $y = \frac{a}{x}$.

Soit à étudier la fonction $y = \frac{a}{x}$ où a est une constante donnée.

Continuité. — La fonction $y = \frac{a}{x}$ comme la fonction $y = \frac{1}{x}$ est définie pour $x \neq 0$.

La continuité s'établissant comme pour la fonction $y = \frac{1}{x}$; on aurait $k = -\frac{ah}{x_1(x_1 + h)}$.

Si x_1 est $\neq 0$, k tend vers zéro en même temps que h et la fonction est continue.

Si $x_1 = 0$, k est infiniment grand par rapport à h et la fonction est discontinue pour $x_1 = 0$.

On étudiera donc, comme pour $y = \frac{1}{x}$, *la variation dans les intervalles* $-\infty, -\varepsilon$ *et* $+\varepsilon, +\infty$.

Sens de variation. — Soient x_1 et x_2 deux valeurs de x auxquelles correspondent les valeurs de y : $y_1 = \frac{a}{x_1}$ et $y_2 = \frac{a}{x_2}$.

On a : $$y_2 - y_1 = \frac{a}{x_2} - \frac{a}{x_1} = \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1x_2};$$

d'où : $$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{a}{x_1x_2}.$$

Si les deux valeurs de x_1 et x_2 sont prises dans l'intervalle $-\infty, -\varepsilon$, le rapport $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ est du signe de $-a$.

Il en est de même si les deux valeurs de x_1 et x_2 sont prises dans l'intervalle $+\varepsilon$, $+\infty$.

Il y a donc lieu de distinguer deux cas.

$a > 0$, *la fonction* $y = \frac{a}{x}$ *est constamment décroissante dans les intervalles où elle est continue.*

$a < 0$ *la fonction* $y = \frac{a}{x}$ *est constamment croissante dans les intervalles où elle est continue.*

98. $a > 0$.

Valeurs remarquables :

Si x tend vers zéro par valeurs positives, y tend vers $+\infty$.
Si x tend vers zéro par valeurs négatives, y tend vers $-\infty$.
Si x tend vers $-\infty$, y tend vers zéro par valeurs négatives
Si x tend vers $+\infty$, y tend vers zéro par valeurs positives.
On peut résumer la variation dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	↗	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	↗	$+\infty$
y	0	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	0

Le graphique se construit comme pour $y = \frac{1}{x}$. Il admet deux asymptotes :

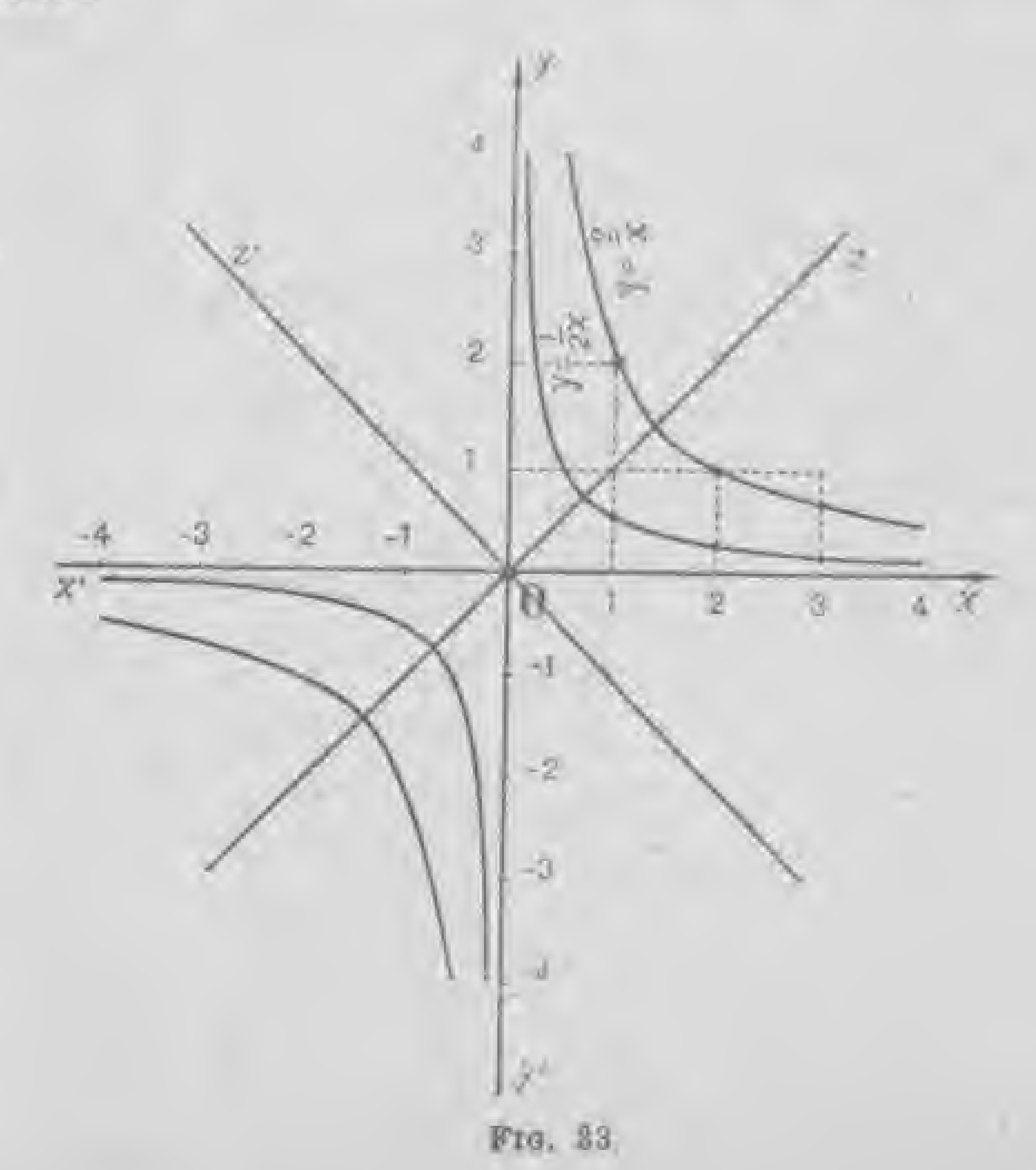


Fig. 33.

l'axe Ox car y tend vers zéro quand x augmente indéfiniment en valeur absolue ;
l'axe Oy car x tend vers zéro quand y augmente indéfiniment en valeur absolue.

Le graphique ci-dessous est construit pour $a = 2$ et $a = \frac{1}{2}$.

Le point de rencontre avec la bissectrice Oz est tel que :

$$x = y = \sqrt{a}.$$

On voit qu'il est d'autant plus écarté de O que a est plus grand.

Symétrie. — Le produit :

$$xy = a$$

ne changeant pas quand on permute x et y, que l'on change x en $-y$ et y en $-x$ ou que l'on change x et y de signe, on prouverait comme pour *la fonction* $y = \frac{1}{x}$ *que la courbe* $y = \frac{a}{x}$ *admet deux axes et un centre de symétrie : les bissectrices de l'angle de ses asymptotes et leur point de concours.*

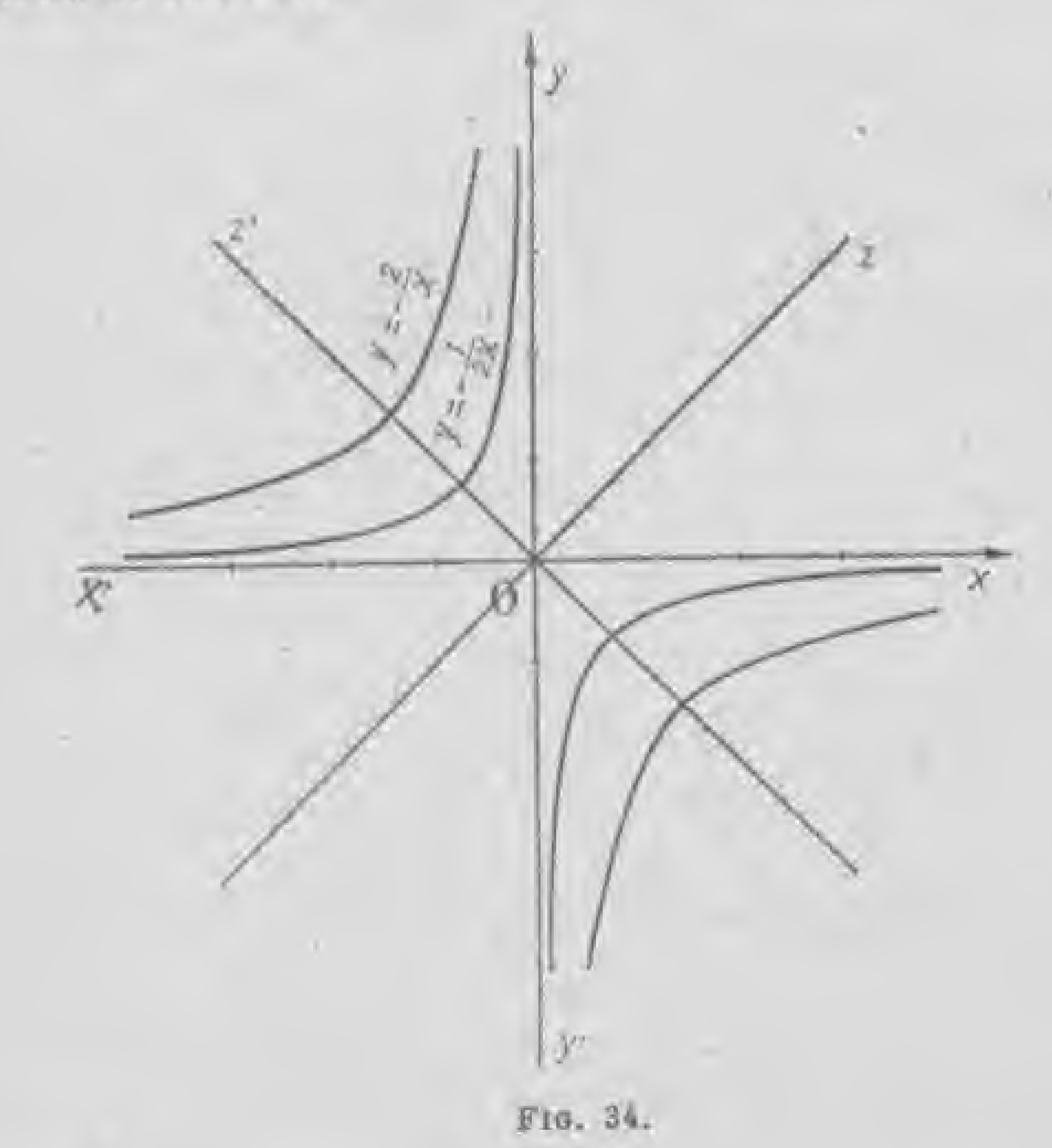


Fig. 34.

99. $a < 0$.

Valeurs remarquables :

Ce sont les mêmes que pour $a > 0$, mais changées de signe.
Si x tend vers zéro par valeurs positives, y tend vers $-\infty$.

Si x tend vers zéro par valeurs négatives, y tend vers $+\infty$.
Si x tend vers $-\infty$, y tend vers zéro par valeurs positives.
Si x tend vers $+\infty$, y tend vers zéro par valeurs négatives.
On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$	$\nearrow$	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0

Le graphique (fig. 34) présente les mêmes asymptotes et les mêmes caractères de symétrie que pour $a > 0$.

Remarques. — 1° Si $a = 0$, pour $x \neq 0$, $y = 0$; la courbe représentative est l'axe Ox mais pour $x = 0$, y est indéterminé et M peut être situé en n'importe quel point de Oy.

Lorsque a = 0, *la fonction* $y = \frac{a}{x}$ *se réduit à ses asymptotes.*

2° En comparant la variation des fonctions $y = \frac{1}{x}$ et $y = \frac{a}{x}$, on voit que, si l'on multiplie une fonction par une constante, la nouvelle fonction varie dans le même sens que la précédente si la constante est positive et dans le sens contraire si elle est négative.

ÉTUDE DES FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

Fonction du premier degré. Ligne droite.

Étudier les variations des fonctions suivantes :

330. $y = 2x - 3$.

331. $y = -5x + 2$.

332. $y = 3x + 1$.

333. $y = -2x + 5$.

Construire les droites d'équations :

334. $x = 3$; $x = -2$; $y = 5$; $y = 3$.
$y = 2x - 1$ $\quad y = -3x + 2$.
$\frac{x}{5} + \frac{y}{6} = 1 \quad \frac{4x}{3} - \frac{2y}{3} =$ [illegible]
$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0 \quad \frac{2x}{3} - \frac{y}{2} - 1 = 0$

335. Construire avec la règle et le compas les droites.

$$x\sqrt{2} - y = 1.$$
$$x\sqrt{3} + y\sqrt{2} = 1.$$
$$x\sqrt{5} - y\sqrt{3} = 1$$

336. Trouver l'équation des droites définies par les couples de points
1° A(0, 1) B(— 3, 0).
2° C(2, — 5) D(2, 1).
3° E(1, 2) F(— 3, 2).
4° G(— 2, 1) H(2, — 1).
5° I(— 3, — 5) J(1, 3).

337. Mener par le point A(2, 1) la droite de coefficient angulaire
1° $a = 3$; 2° $a = \frac{1}{2}$; 3° $a = -1$; 4° $a = 0$.

338. Dans le plan xOy on donne A(1, 2). Mener par B(— 5, — 1) la droite parallèle à OA. Équation de cette droite.

339. Équation des côtés d'un triangle équilatéral de côté a dont un côté est placé suivant Ox et une hauteur suivant Oy.

340. Trouver les équations des côtés et les coordonnées des milieux des côtés du triangle dont les sommets sont les trois points (5, 0), (1, 2), (— 3, — 2).

341. Trouver les équations des médianes de ce triangle.

342. Trouver les coordonnées des sommets du triangle dont les équations des côtés sont :

$$x + y = 1, \quad x - 2y = 3, \quad 3y - 5x = 15.$$

343. Trouver les équations des parallèles aux côtés, menées par les sommets du triangle précédent.

344. Trouver les équations des droites joignant les milieux des deux côtés quelconques du triangle dont les côtés ont pour équations :

$$4x - 3y + 1 = 0, \quad 2x + y - 7 = 0, \quad x + 3y + 4 = 0.$$

345. Construire les droites représentées par les équations

$$\frac{5x}{3} - 4y = 6 ;$$
$$3x + \frac{7y}{11} = 2.$$

Déterminer leurs coefficients angulaires et l'équation de la parallèle à l'axe $x'x$ passant par leur point d'intersection.

346. Construire les droites $y = mx + 4$ et $y - 2 = m(x - 5)$ quand m prend les valeurs 1, — 2 et 3.

347. Quelle valeur faut-il donner à m et à n pour que la droite $3y = mx + n$ passe par les points A(— 3, 5) et B(4, — 2) ?

348. Démontrer par la géométrie analytique que dans tout trapèze la droite joignant les milieux des deux côtés non parallèles aux bases est parallèle à ces bases.

349. Un hexagone régulier a pour côté a. On mène par son centre deux axes de coordonnées rectangulaires, l'axe Ox passant par l'un des sommets ; coordonnées des sommets et équations des côtés de ce polygone.

350. Les trois côtés d'un triangle ont respectivement pour équations
$3y - 7x + 26 = 0$. $9y - 2x - 17 = 0$ $6y + 5x + 14 = 0$.
Coordonnés des sommets et longueurs des côtés.

351. Du point A(5, 7), abaisser une perpendiculaire sur la bissectrice de l'angle xOy des deux axes rectangulaires (première bissectrice).
Déterminer de même l'équation de la perpendiculaire abaissée du même point A sur la seconde bissectrice.

352. Par le point A(— 2, 1) mener les perpendiculaires aux droites suivantes ;
$y = 3x - 2$; $y + x = 1$; $2y - 3x = 5$; $x + 2y = 0$.

353. Équations des hauteurs du triangle dont les côtés ont pour équations :
$4x - 3y + 1 = 0$; $2x + y - 7 = 0$; $x + 2y + 4 = 0$.
Vérifier que ces droites sont concourantes.

354. Équations des médianes du triangle dont les côtés ont pour équations :
$3y - 7x + 26 = 0$; $9y - 2x - 17 = 0$; $6y + 5x + 14 = 0$.
Vérifier qu'elles sont concourantes.

355. Équations des médiatrices du triangle dont les sommets sont A(4, 6) B(— 2, 2) C(2, — 4).
Vérifier qu'elles sont concourantes et que le point de concours est équidistant des trois sommets.

356. On donne le point A(4, 4). Par ce point A, on mène les droites AB et AC de coefficient angulaire $\sqrt{3}$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}$, qui recoupent Ox en B et C respectivement. On mène également AD perpendiculaire à OA qui coupe Ox en D. Trouver les équations de ces droites et les abscisses de B C et D. Vérifier que la division BCOD est harmonique ; quelle conclusion peut-on en tirer relativement à la position de OA dans le triangle ABC ?
Prouver que $\frac{AB}{AC} = \frac{OB}{OC} = \frac{DB}{DC}$.

357. Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les trois droites :
$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ (1), $\frac{x}{p'} + \frac{y}{q'} = 1$ (2), $\frac{x}{p + p'} + \frac{y}{q + q'} = 1$ (3)
soient : 1° parallèles ; 2° concourantes.

358. Quelle valeur faut-il donner à n pour que les droites représentées par les équations
$$3y = 4x + n,$$
$$2y = 3x + 5,$$
$$y = 5x + 8,$$
se rencontrent en un même point ?

359. Quelle valeur faut-il donner à m pour que les droites
$$y = 2x + 5$$
et
$$y = mx - 3$$
se rencontrent sur la bissectrice de l'angle $x'Oy$?

360. Soit la droite AB d'équation
$$mx + (2m + 7)y = 5m - 2.$$
Quelles valeurs faut-il donner à m :
1° Pour que le coefficient angulaire soit égal à — 1 ?
2° Pour que cette droite coupe l'axe Ox au point A(— 5, 0) ?
Dans ce dernier cas, quelles sont les coordonnées du point B où cette droite coupe l'axe Oy ?

361. Démontrer que la droite
$$x(m^2 + 6m + 3) - y(2m^2 + 18m + 2) - 3m + 2 = 0,$$
variable avec le paramètre m, passe par un point fixe quel que soit m.

362. On donne l'équation :
$$(m - 1)x + (2m - 1)y = m - 5.$$
Pour quelles valeurs du paramètre m cette droite est-elle ?
1° parallèle à l'axe Ox ?
2° parallèle à l'axe Oy ?
3° Cette droite peut-elle passer par l'origine des axes de coordonnées ?
4° Démontrer que cette droite passe par un point fixe dont on déterminera les coordonnées.

363. On donne sur l'axe Ox les deux points A(2, 0) et C(— 4, 0) et sur Oy les deux ponts B(0, 3) et D(0, — 6).
Équations des côtés du quadrilatère ABCD.
Soient I le point de concours de AD et BC et J celui de AB et CD. Trouver les coordonnées. Équation de la droite IJ ; coordonnées des points E et F ou IJ rencontre Ox et Oy.
Prouver que les divisions CAOE et BDOF sont harmoniques.

364. On donne les points A(3, 2), B(— 5, 4), C(— 3, — 4), D (2, — 3). Soient I et J les points de concours de BA et CD et de AD et BC. Prouver que IJ est parallèle à AC et que BD passe par le milieu de IJ.

Fonctions $y = ax^2$ et $y = \frac{a}{x}$.

365. Étudier les variations des fonctions
$$y = 2x^2$$
$$y = -3x^2$$
$$y = \frac{x^2}{3}$$
$$y = -\frac{2x^2}{5}.$$

366. On donne un triangle isocèle de côté x et d'angle au sommet 120°. Étudier la variation de l'aire de ce triangle et celle de l'aire de son cercle inscrit quand x varie.

367. Tracer sur un même graphique les lignes représentant les variations des fonctions $y_1 = 2x - \frac{8}{3}$ et $y_2 = \frac{x^2}{3}$. Déterminer graphiquement ou par le calcul leurs points communs et en déduire entre quelles limites de variations de x on a $y_1 > y_2$.

368. Tracer sur un même graphique les lignes représentant les variations des fonctions $y_1 = 4x - \frac{4}{3}$ et $y_2 = 3x^2$. Déterminer leur point commun.

369. On donne sur la courbe $y = \frac{2x^2}{3}$ les points A et B d'abscisses respectives 1 et $1 + h$. Déterminer le coefficient angulaire de la droite AB. Trouver la limite m de ce coefficient angulaire quand h tend vers zéro. Donner l'équation de la droite de coefficient angulaire m passant par A et vérifier qu'elle n'a qu'un point de rencontre avec la courbe.

370. On trace la courbe représentative de la variation de la fonction $y = \frac{5x^2}{4}$ et on considère le point $F\left(0, \frac{1}{5}\right)$ et la droite d'équation $y = -1/5$. Montrer que tout point M de la courbe est équidistant du point F et de la droite D.

Généraliser en considérant la courbe $y = ax^2$, et le point $F(0, 1/4a)$ et la droite $y = -1/4a$. En déduire une définition générale des courbes C.

371. Étudier la variation des fonctions

$$y = \frac{2}{x};$$
$$y = -\frac{3}{x};$$
$$y = \frac{2}{5x};$$
$$y = -\frac{5}{3x}.$$

372. Construire sur le même graphique la courbe $y = \frac{3}{x}$ et la droite $y = x - 4$.

Trouver graphiquement ou par le calcul leurs points communs.

373. Construire sur le même graphique les lignes représentant la variation des fonctions $y = -\frac{2}{x}$ et $y = 2x - 4$.

Trouver leur point commun et préciser la position de la droite par rapport à la courbe.

374. On donne la fonction $y = \frac{3}{5x}$ et les points A et B de la courbe d'abscisses respectives -2 et $-2 + h$. Trouver le coefficient angulaire de la droite AB. Limite m de ce coefficient angulaire quand h tend vers 0. Équation de la droite de coefficient angulaire m passant par A. Quelle est sa position par rapport à la courbe ?

375. On considère deux droites parallèles D et D' et leur perpendiculaire commune AB. On prend sur Ax un point M tel que $AM = x$, et de M on mène une tangente au cercle de diamètre $AB = 2R$. Elle coupe la droite D' en N.

Évaluer le segment $BN = y$ en fonction de x et tracer la courbe représentant ses variations quand M se déplace sur D. Peut-on donner à x des valeurs négatives ? Quelle est alors la position de N et le signe de y ?

Montrer que le cercle de diamètre MN est tangent à AB.

CHAPITRE V

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

§ I. *GÉNÉRALITÉS.*

100. DÉFINITIONS. — On a vu que, dans une expression algébrique, certaines lettres peuvent avoir une valeur déterminée ; on les appelle des **constantes** ; d'autres, au contraire, peuvent être susceptibles de prendre diverses valeurs, ce sont des **variables**.

Si l'on établit une égalité entre deux expressions algébriques, deux cas peuvent alors se présenter : ou bien, l'égalité est vérifiée quelles que soient les valeurs données aux variables ; on a une **identité**.

Exemple : $(x - a)^3 \equiv x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3$ est une identité ;

ou bien, l'égalité n'est vérifiée que pour certaines valeurs particulières données aux variables, on a alors une **équation**.

Exemples : L'égalité $2x - 5 = 11$

qui n'est vérifiée que pour la valeur 8 donnée à x ;

l'égalité $x^2 - 3x + 2 = 0$,

qui n'est vérifiée que pour les valeurs particulières $x = 1$ et $x = 2$ sont des équations.

Une équation est donc une égalité qui n'est vérifiée que pour des valeurs particulières données à certaines lettres appelées des inconnues.

Résoudre une équation, c'est chercher les valeurs particulières des inconnues qui vérifient l'égalité. On désigne habituellement les inconnues par les dernières lettres de l'alphabet x, y, z.

Une équation peut être à **une, deux ou trois... inconnues** suivant le nombre de variables qu'elle renferme.

Elle est **numérique** lorsqu'elle ne contient pas d'autres lettres que les inconnues. Elle est **littérale** dans le cas contraire.

Exemples : $2x^3 - 5xy^2 + 2y^3 = 0$ est une équation numérique;
$3a^2x - 6abx^2 + 8b^3x^3 = 0$ est une équation littérale
où x est l'inconnue et a et b des quantités connues.

Une équation est **entière** si les inconnues ne figurent pas au dénominateur de l'expression ; elle est **fractionnaire** dans le cas contraire.

Elle est **rationnelle** si les inconnues ne figurent pas sous un radical, **irrationnelle** dans le cas contraire.

Exemple : $\frac{(3x-2)}{4} + \frac{(2x-1)(x+2)}{5} = 0$ est une équation entière ;

$\frac{2x-1}{x+1} + \frac{x-2}{2x-3} = 5$ est une équation rationnelle fractionnaire ;

$\sqrt{x-1} + \sqrt{x-5} = 2x - 4$ est une équation irrationnelle.

Deux équations sont dites équivalentes si elles admettent les mêmes solutions, c'est-à-dire si toutes valeurs des inconnues qui vérifient la première vérifient aussi la seconde et réciproquement.

Si l'on ajoute ou si l'on retranche un même nombre aux deux membres d'une équation, on obtient une seconde équation équivalente à la première.

Il est évident que si les deux termes de l'équation sont égaux pour certaines valeurs des inconnues, ils le seront encore après addition ou soustraction d'un même terme.

Il en est de même *si l'on multiplie ou si l'on divise les deux termes d'une équation par une même expression ne renfermant pas l'inconnue.*

Si l'expression renferme l'inconnue, il est possible que cette multiplication entraîne l'apparition ou la suppression de certaines solutions et que les nouvelles équations ne soient par conséquent pas équivalentes aux précédentes. On devra vérifier si ces solutions conviennent.

On peut, dans une équation, faire passer un terme d'un membre dans un autre, à la condition de le changer de signe.

Cela revient à ajouter aux deux membres de l'équation cette expression changée de signe

Exemple : on peut écrire équivalemment

$$2x + 5a = 3x - 2b$$

ou : $$2x + 5a + 2b = 3x - 2b + 2b = 3x.$$

et $$2x + 5a + 2b = 3x.$$

§ II. ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE.

101. ***On appelle équation du premier degré à une inconnue, une expression de la forme :***

$$ax + b = 0$$

où x est l'inconnue, a et b deux expressions (littérales ou numériques) ***de valeur connue.***

Cette expression peut s'écrire :

$$ax = -b$$

Il y a alors à distinguer deux cas :

a ≠ 0. Dans ce cas l'égalité précédente peut s'écrire :

$$x = -\frac{b}{a},$$

et l'équation admet **une seule solution ;**

si **a = 0,** il y a encore lieu de distinguer deux éventualités ; si **b ≠ 0,** l'égalité est **impossible ;** l'équation n'admet aucune solution.

Si **b = 0,** l'égalité est vérifiée quelle que soit la valeur donnée à x ; l'équation admet une infinité de solutions ; elle est **indéterminée.**

Exemples : 1° $$\frac{3x}{5} - \frac{2x}{7} = \frac{x}{2} - 3.$$

L'équation peut s'écrire :

$$\frac{3x}{5} - \frac{2x}{7} - \frac{x}{2} = -3$$

$$\frac{42x - 20x - 35x}{70} = -3$$

$$-\frac{13}{70}x = -3 ; \qquad x = +\frac{210}{13}.$$

2° $$(m-1)x - 8m + 5 = 0.$$

Ceci peut s'écrire : $(m-1)x = 8m - 5.$

Si $m - 1 \neq 0$, on aura : $x = \frac{8m-5}{m-1}$ seule solution.

Si $m - 1 = 0$, ou $m = 1$ l'équation devient :

$$0x = 3,$$

égalité impossible, le produit d'une quantité nulle par une quantité finie étant toujours nulle.

ÉQUATIONS QUI SE RAMÈNENT AU PREMIER DEGRÉ

102. ÉQUATIONS PRODUIT. — ***Ce sont des expressions formées de facteurs du premier degré dont le produit doit être nul.***

Or, pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul. On résoudra donc cette équation en égalant successivement à zéro chacun des facteurs contenant l'inconnue. Il y aura autant de solutions qu'il y a de facteurs.

Exemples : 1° $(x-2)(x-5)(x+7) = 0.$

Les solutions de cette équation sont celles de :

$$x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2$$
$$x - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad x = 5$$
$$x + 7 = 0 \quad \text{ou} \quad x = -7.$$

2° $(x-4)(x-2) = 5x(x-4)$.

En faisant passer le second membre dans le premier, et en mettant $x-4$ en facteur, on obtient :

$$(x-4)[x-2-5x] = (x-4)[-4x-2] = 0,$$

ce qui donne les deux solutions

$$x-4=0 \quad \text{ou} \quad x=4$$
$$-4x-2=0 \quad \text{ou} \quad x=-1/2.$$

Remarque. — Ce serait une faute de diviser par $x-4$ les deux membres.

On supprimerait ainsi la solution $x=4$.

103. ÉQUATIONS ADMETTANT L'INCONNUE AU DÉNOMINATEUR.

Si l'équation renferme des fractions au dénominateur desquelles figure l'inconnue, on peut les ramener à la forme entière en les réduisant au même dénominateur, *à condition d'exclure les valeurs de* x *qui annulent ce dénominateur et pour lesquelles les fractions proposées n'auraient plus de sens.*

1er *Exemple :* $\dfrac{3}{x^2-1} - \dfrac{2x}{x+1} = \dfrac{5x}{x^2-1} - \dfrac{2x}{x-1}$.

Si l'on réduit au même dénominateur, les deux membres, on aura :

$$\frac{3-2x(x-1)}{x^2-1} = \frac{5x-2x(x+1)}{x^2-1}$$

les dénominateurs étant égaux, il faut que les numérateurs le soient, ce qui exige :

$$3+2x-2x^2 = 3x-2x^2$$

ou : $$x=3.$$

Cette valeur n'annulant pas le dénominateur est acceptable.

2e *Exemple :* Résoudre $\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{2}{x+1}$.

Cette équation peut s'écrire :

$$\frac{3x-5}{x^2-3x+2} = \frac{3x-5}{x^2-2x-3}.$$

Si le numérateur $3x-5$ est nul, les deux fractions sont nulles et l'égalité est vérifiée.

On a donc la solution

$$x = \frac{5}{3}.$$

Si $3x-5 \neq 0$, les numérateurs étant égaux, il faut que les dénominateurs le soient ou que

$$x^2-3x+2 = x^2-2x-3$$

ou : $$x=5.$$

Cette valeur n'annulant aucun des dénominateurs, convient.

3e *Exemple :* $\dfrac{2+2x}{9x^2-4} = \dfrac{x-2}{9x^2+12x+4} + \dfrac{x+4}{9x^2-4}$.

Cette équation peut s'écrire :

$$\frac{x-2}{9x^2-4} = \frac{x-2}{9x^2+12x+4}.$$

Si le numérateur $x-2$ est nul, les deux fractions sont nulles et l'égalité est vérifiée.

$$x = 2.$$

Si $x-2$ n'est pas nul, les numérateurs étant égaux, il faut que les dénominateurs le soient, ce qui exige :

$$9x^2-4 = 9x^2+12x+4$$

ou : $$12x = -8$$
$$x = -2/3.$$

mais cette valeur annule $9x^2-4$. Elle est donc à rejeter.

§ *III. INÉGALITÉS ET INÉQUATIONS.*

104. DÉFINITIONS. — ***On appelle inégalité l'expression de deux quantités dont l'une est plus grande que l'autre.***

Les signes $<$ (plus petit que) et $>$ (plus grand que) sont les symboles de l'inégalité.

Exemple $-4 < 7$ et $3 > -2$.

On peut ajouter ou retrancher une même quantité aux deux membres d'une inégalité et on obtient une inégalité de même sens que la première.

Si $a < b$,

on aura de même : $a+c < b+c$,

ou : $a-c < b-c$.

On peut donc faire passer un terme d'un membre d'une inégalité dans l'autre en le changeant de signe sans en modifier le sens.

Cela revient en effet, comme pour les égalités, à ajouter aux deux membres ce terme changé de signe.

Si $a < b+c$

et : $a-c < b+c-c$.
$$a-c < b.$$

On peut de même multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par une même quantité positive sans changer le sens de l'inégalité.

En effet, l'inégalité $a > b$

indique que la différence $a-b$ est positive.

c étant positif, il en est de même de la différence

$$ac - bc,$$

et par suite : $$ac > bc.$$

Il en est de même pour la division. Le raisonnement montre *que la multiplication ou la division des deux membres d'une inégalité par une quantité négative change le signe de la différence, donc le sens de l'inégalité.*

Si les deux termes d'une inégalité sont tous deux positifs, on peut les élever à une puissance quelconque, les puissances de deux nombres positifs croissant dans le même sens que ces nombres.

Si les deux termes sont négatifs, on peut les élever à une puissance impaire, ce qui ne change pas le signe des termes et leur grandeur relative.

Si on élève à une puissance paire les deux termes négatifs d'une inégalité, il faut changer le sens de l'inégalité car l'opération modifie le signe des deux membres.

Si dans une inégalité, l'un des termes est positif et l'autre négatif, on peut encore les élever à une puissance impaire, ce qui ne change pas le signe des termes, mais on ne peut pas les élever à une puissance paire, car on ne peut conclure à la valeur relative des termes ainsi obtenus.

105. INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

Une inéquation est une inégalité qui n'est vérifiée que pour certaines valeurs données à des inconnues.

Les valeurs des inconnues qui vérifient l'inéquation sont dites solutions de l'inéquation.

Chercher ces solutions, c'est résoudre l'inéquation. On peut, pour résoudre ces inéquations, leur appliquer les propriétés des inégalités qui ont été exposées plus haut.

Une inéquation du premier degré est une expression de la forme

$$\mathbf{ax > b \text{ ou } ax < b},$$

où a *et* b *sont des quantités données et* x ***l'inconnue.***

a) **Résolution de l'inéquation ax > b.**

1° **Si a ≠ 0, il y a deux cas à distinguer :**

Si $a > 0$, on peut diviser les deux membres de l'inéquation par la quantité positive a et l'inéquation devient :

$$x > b/a.$$

Toute valeur de x *supérieure à* b/a *est donc solution de l'inéquation*

Si $a < 0$, on peut écrire l'inéquation :

$$-b > -ax.$$

En divisant par $-a$ qui est positif, on aura

$$+b/a > x$$

toutes les valeurs de x *inférieures à* b/a *sont donc solutions de l'inéquation.*

2° **Si a = 0,** le premier membre est nul quel que soit x ; si b est négatif, l'inéquation est vérifiée pour toutes les valeurs de x ; si b est positif, elle n'est vérifiée pour aucune valeur de x, elle est impossible.

b) Même raisonnement pour $ax < b$.

Exemples : 1° $\quad 2x - 3 < \dfrac{5x-1}{4} - 5.$

On peut écrire successivement

$$8x - 12 < 5x - 1 - 20$$
$$8x - 5x < 12 - 1 - 20$$
$$3x < -9 \qquad x < -3.$$

2° $\quad (m-2)\,x > (2m-1)\,x - 3$

ou : $\quad (m+1)\,x < 3.$

a) Si $m > -1$, $\quad m + 1 > 0$ et $x < \dfrac{3}{m+1}$

si $m < -1$, $m + 1 < 0$ et $x > \dfrac{3}{m+1}$

si $m = -1$ l'inégalité est vérifiée quel que soit x.

106. SYSTÈME D'INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

Inéquations dont le premier membre est un produit de facteurs. — Pour résoudre un tel système, on cherche séparément le signe de chacun des termes, on construit un tableau donnant les valeurs de x et on en déduit le signe du produit. On en conclut ensuite les valeurs de x qui répondent au signe demandé.

Exemple : $\quad (x-2)(x+3)(2x-1) > 0.$

On a : $\quad x - 2 > 0$ pour $x > 2$

$x + 3 > 0$ pour $x > -3$

$2x - 1 > 0$ pour $x > 1/2.$

On a donc le tableau des signes :

x	$-\infty$	-3	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$x-2$	—	—	—	+	
$x+3$	—	+	+	+	
$2x-1$	—	—	+	+	
P	—	+	—	+	

L'inéquation est donc vérifiée pour :

$$-3 < x < \frac{1}{2} \qquad 2 < x$$

2° Trouver les valeurs de x qui vérifient l'inégalité

$$\frac{3x-2}{2x-1} - 1 < 0.$$

On peut l'écrire : $\quad \dfrac{x-1}{2x-1} < 0.$

On cherche ensuite par la méthode donnée ci-dessus le signe du produit $(x-1)(2x-1)$ qui est le même que celui de la fraction.
On a le tableau :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	
$2x-1$	$-$	$+$	$+$	
P	$+$	$-$	$+$	

L'inéquation est vérifiée quand :

$$\frac{1}{2} < x < 1.$$

107. INÉQUATIONS SIMULTANÉES.

On cherche les valeurs de x qui satisfont simultanément à diverses inéquations.

Pour cela, on cherche d'abord les valeurs de x qui satisfont à chaque inéquation séparément, puis on dresse un tableau indiquant pour chaque intervalle trouvé, si cette vérification est acquise ou non et l'on déduit de là les valeurs de x qui satisfont à toutes les inéquations.

Résoudre le système d'inéquations

$$5x - 6 > 3x - 14$$

$$\frac{7x+6}{2} < x + 12$$

$$\frac{5x-3}{4} < \frac{x}{3} + 6.$$

On voit que la première inéquation est vérifiée pour $x > -4$, la seconde pour $x < \frac{18}{5}$, la troisième pour $x < \frac{81}{11}$.

On a donc le tableau suivant où le trait est tracé dans l'intervalle où l'inéquation est vérifiée.

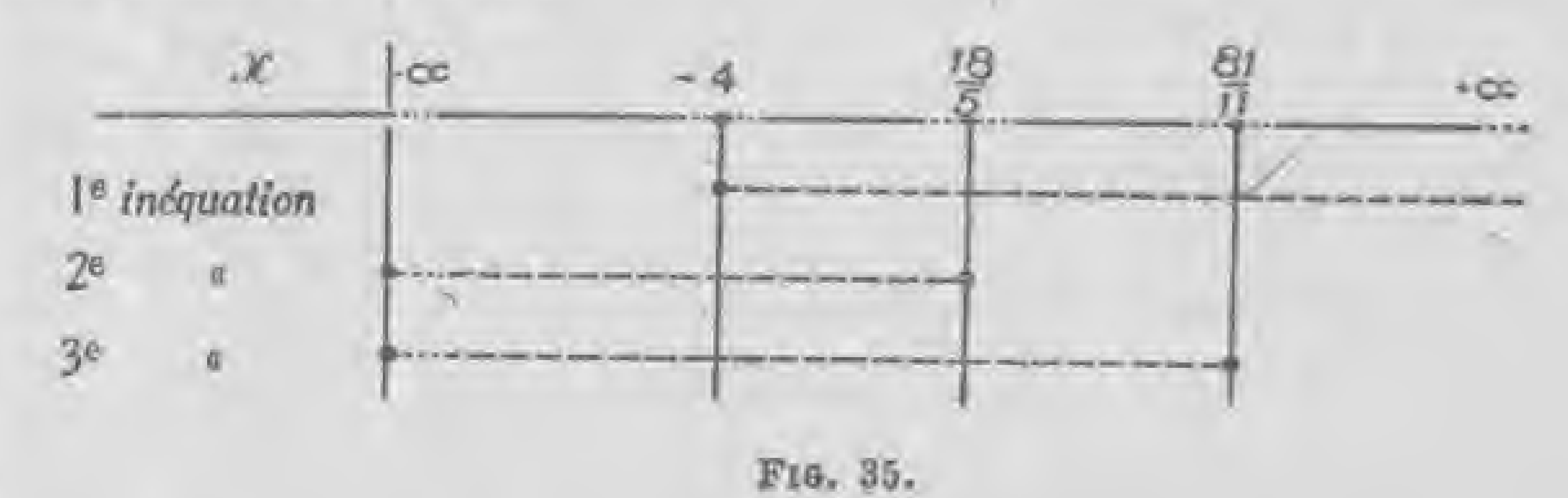


FIG. 35.

On voit que les trois inéquations sont satisfaites si :

$$-4 < x < \frac{18}{5}.$$

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

Équations à une inconnue

Résoudre les équations numériques suivantes :

376. $7(x-18) = 3(x-14).$

377. $7(x-3) = 9(x+1) - 38.$

378. $\frac{3x-16}{x} = \frac{5}{3}.$

379. $\frac{5x-5}{x+1} = 3.$

380. $\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{5x}{6} = 15.$

381. $\frac{7x}{8} - 5 = \frac{9x}{10} - 8.$

382. $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{7} = x - 2.$

383. $4(x-3) - 7(x-4) = 6 - x.$

384. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = x - 17.$

385. $2x - \frac{19-2x}{2} = \frac{2x-11}{2}.$

386. $\frac{10x+3}{3} - \frac{3x-1}{5} = x - 2.$

387. $x + \frac{3x-9}{5} = 4 - \frac{5x-12}{3}.$

388. $\frac{x}{3} - \frac{1}{3} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} = \frac{x}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{x}{6}.$

389. $\frac{5x-7}{2} - \frac{2x+7}{3} = 3x - 14.$

390. $\frac{x-2}{3} - \frac{12-x}{2} = \frac{5x-36}{4} - 1.$

391. $\frac{5x-2}{3} - \frac{x-8}{3} = \frac{x+14}{2} - 2.$

392. $\frac{2x-5}{3} - \frac{5x-3}{4} + 2 + \frac{2}{3} = 0.$

393. $\frac{x+4}{3} - \frac{x-4}{5} = 2 + \frac{3x-1}{15}.$

394. $\frac{1}{7}(3x-4) + \frac{1}{3}(5x+3) = 43 - 5x.$

395. $\frac{1}{2}(27 - x) = \frac{9}{2} + \frac{1}{10}(5x - 54)$

396. $\frac{1}{6}(8 - x) + x - 1\frac{2}{3} = \frac{1}{2}(x + 6) - \frac{x}{3}.$

397. $\frac{7}{24} - \frac{\frac{13}{15}}{\frac{2x}{3} + \frac{4}{5}} = \frac{1}{4}.$

398. $\frac{5}{6}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{7}{6}\left(\frac{x}{5} - \frac{1}{7}\right) = 4\frac{8}{9}.$

399. $\frac{5x}{3} + 2x + 6\left(x - \frac{x}{3} - \frac{4x}{9}\right) = 450\,000.$

400. $\frac{\frac{x}{2} - 5}{\frac{x + 8}{2} - 8} + \frac{x - 8}{2} + x = \frac{3x}{2} + \frac{49}{16}.$

401. $\frac{3x - 7}{4x + 2} = \frac{3x - 14}{4x - 13}.$

402. $\frac{7x + 16}{21} - \frac{x + 8}{4x + 10} = \frac{23}{70} + \frac{x}{3}.$

403. $\frac{1}{2x - 3} - \frac{3}{2x^2 - 3x} = \frac{5}{x}.$

404. $\frac{1}{2}\left[8 - \frac{x}{3} - 2\left(\frac{x}{2} + 5\right)\right] - \left[6 - \frac{3x}{2} + 3(x - 5)\right] + 5 = 0.$

405. $\frac{3x}{2} - \frac{2}{3} + 5\left(4x + \frac{7x}{10}\right) - \frac{103}{3} = 9x - \frac{x + 7}{3}.$

406. $13 + \frac{3x + 2}{7} - \left[\frac{5x - 4}{8} + 3\left(\frac{2x + 4}{9}\right)\right] =$
$\frac{6x + 3}{7} - \frac{3}{5}\left(\frac{11x + 1}{9}\right) + 9.$

407. $\frac{1}{2}\left[\frac{2x + 9}{2} - \frac{x + 4}{2}\right] + \frac{5x + 6}{4} = \frac{7x - 2}{4}.$

408. $\frac{8x}{4} + \frac{3x}{2} - 4\left(\frac{x}{2} - 2x\right) + \frac{3}{2} = 4\left(\frac{3x - 2}{5}\right) - 7.$

409. $x - \left(7x - \frac{6x + 10}{5}\right) = \frac{1}{7}(5x + 67) + \frac{3}{5}\left(x - \frac{245}{7}\right) - \frac{54}{3}.$

410. $\frac{\frac{2x}{3} - 2}{5} - \frac{\frac{3x}{2} + 1}{2} = \frac{8x + 5}{10} - \frac{x}{5}.$

411. $4\left(\frac{2x - 7}{9}\right) - \frac{3 - \frac{5(x - 2)}{3}}{3} + \frac{13}{27} = \frac{\frac{3x - 5}{3} - 2}{4} + \frac{217}{108}.$

412. $\frac{14x + 11}{21} - \frac{3x - 7}{4x + 10} = \frac{23}{70} + \frac{2x - 30}{3}.$

413. $(2 - x)[16 - 12(12 + 2x)] = 2x[12(x + 5) - 12].$

414. $\frac{\frac{x + 1}{x - 1} - \frac{x - 1}{x + 1}}{1 - \frac{x + 1}{x - 1}} = \frac{1}{2}.$

415. $\frac{x}{2} - \frac{2}{3}\left(\frac{2x - 3}{x - 1}\right) + \frac{\frac{10x}{3} - 1}{2(x - 1)} = \frac{3}{2}\left(\frac{x^2 + 2}{3x - 2}\right).$

416. $\frac{3 + 2x}{1 + 2x} - \frac{5 + 2x}{7 + 2x} = 1 - \frac{4x^2 - 2}{7 + 16x + 4x^2}.$

417. $\frac{x + a}{a - b} + \frac{x - a}{a + b} = \frac{x + b}{a + b} + \frac{2(x - b)}{a - b}.$

418. $(a + x)(b + x) - a(b + c) = \frac{a^2c}{b} + x^2.$

419. $\frac{x}{ab} + \frac{x}{bc} + \frac{x}{ac} - 1 = abc - x(a + b + c).$

420. $(b + c)^2 = \frac{b^3 - c^3}{b - c} + \frac{bc(b + c)}{x}.$

421. $\frac{1}{\frac{3(m + n)^2}{p^2x} - \frac{m + n}{p}} = \frac{p}{2(m + n)}.$

422. $3x - \left(\frac{x}{3} + \frac{5a}{6}\right) = \frac{2a}{5} - \frac{a}{3} - \left(\frac{a}{2} - \frac{5x}{3}\right).$

423. $x - \frac{a}{5} - \left(2x - \frac{a}{10}\right) = 3x - \frac{a}{4} + 4x - \frac{37a}{3}.$

424. $\frac{(a+b)^2(x+1) - (a+b)(x+1) + (x+1)}{a + b + 1} = (a+b)^2 - (a+b) + 1.$

425. $\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x - b} = \frac{a - b}{x^2 - ab}.$

426. $\frac{a}{x - a} - \frac{b}{x - b} = \frac{a - b}{x + a - b}.$

427. $\frac{x + 1}{x - 1} = \frac{a + b + 1}{a + b - 1}.$

428. $\frac{x + a - b}{a} - \frac{x + b - a}{b} = \frac{b^2 - a^2}{ab}.$

429. $$\frac{x-1}{x+a-b}=\frac{1-x}{x-a+b}+2.$$

430. $$\frac{x+a+b}{x+a}=\frac{x+a-b}{x-a}-\frac{a^2+b^2}{x^2-a^2}.$$

431. $$[(a^2-b^2)x-1]^2+(2abx-1)^2=[(a^2+b^2)x+1]^2.$$

432. $$\frac{x+a^2}{(a+b-c)(a-b+c)}+\frac{x-b^2-c^2}{(c-a-b)(b-a-c)}=1.$$

433. $$\frac{x}{a^{m-1}b^m}-\frac{x}{a^mb^{m-1}}=\frac{1}{b^m}-\frac{1}{a^m}.$$

434. $$\frac{ax^{m+1}-x^m}{x-1}+\frac{bx^m}{x+1}=\frac{ax^m(x^2+1)}{x^2-1}.$$

Équations dépendant d'un paramètre

Résoudre et discuter les équations suivantes d'après les valeurs du paramètre :

435. $$(m-2)x+m-7=0.$$

436. $$\frac{mx}{2}+4x=(m-1)x+5.$$

437. $$x-a=\frac{x-1}{a}.$$

438. $$\frac{x-1}{m}+40x-5=0.$$

439. $$[(m^2-1)x-1]^2=[(m^2+1)x+1]^2-(2mx-1)^2.$$

440. $$\frac{x+1}{x+2+m}=\frac{x-1}{x+2-m}.$$

441. $$\frac{4}{x-4m}=\frac{5}{x-m}-\frac{1}{x-4}.$$

442. $$\frac{9x}{20m}+\frac{x}{20}-1=-m+\frac{x(m+9)}{20}.$$

443. $$\frac{2x+m}{3}-\frac{x-3}{m}-\frac{3mx+(m-3)^2}{3m}=0.$$

444. $$\frac{x-2}{m}-\frac{4+m^2}{2m}=-\frac{x-m}{2}.$$

445. $$\frac{1+ax}{1-ax}=\frac{3+a^2x^2}{1-a^2x^2}.$$

446. $$\frac{x-a}{x+a}=k.$$

447. $$\frac{1}{1-m^2x^2}=\frac{m}{1+mx}-\frac{1}{1-mx}.$$

448. $$\frac{2x+a}{b}-\frac{x-b}{a}=\frac{3ax+(a-b)^2}{ab}.$$

Inéquations du premier degré à une inconnue

Résoudre les inégalités :

449. $$4x-7>3x+2.$$

450. $$5x-1>\frac{2x}{5}+3$$

451. $$\frac{7x}{5}-\frac{1}{2}>\frac{3x}{2}-5.$$

452. $$\frac{5x}{7}-\frac{13}{21}+\frac{x}{15}>\frac{9}{5}-\frac{2x}{35}.$$

453. $$\frac{2x}{3}-\frac{5x}{2}+7>\frac{4x}{5}-\frac{2}{3}.$$

Trouver les valeurs de x qui satisfont simultanément aux inégalités suivantes :

454. $$6x+\frac{5}{7}>4x+7 \quad \text{et} \quad \frac{8x+3}{2}<2x+25.$$

455. $$15x-2>2x+\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad 2(x-4)<\frac{3x-14}{2}.$$

456 $$8x-5>\frac{15x-8}{2} \quad \text{et} \quad 2(2x-3)>5x-\frac{3}{4}.$$

457. $$\frac{4x-5}{7}<x+3 \quad \text{et} \quad \frac{3x+8}{4}>2x-5.$$

458. $$-15<2x+3<-3.$$

459. $$16<1-x<19.$$

460. $$15x-\frac{1}{3}>2(x+1) \quad \text{et} \quad 4(x-4)<3x-14.$$

461. $$\frac{x-1}{3}-\frac{2-x}{4}>\frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \frac{x-1}{10}-\frac{x-3}{5}<\frac{1}{2}.$$

462. $$\frac{3x-1}{2}>\frac{1-2x}{3};\quad 7x-9<10-\frac{x}{3};\quad -\frac{x}{4}+3<7+\frac{x-3}{4}.$$

463. $$-2x+1>4x+5,\quad 7x+3<0,\quad 8x+3<1-x.$$

Résoudre les inéquations littérales suivantes :

464. $$\frac{a+bx}{c^2}>\frac{a-cx}{b^2}.$$

465. $$a-bx>cx-d.$$

466. $$\frac{x-a}{a-b}>\frac{x-b}{a+b} \quad (a \text{ et } b>0).$$

467. $$\frac{x+m}{m^2+n^2}>\frac{x-m}{m^2-n^2}.$$

468. $$\frac{mx+n}{a+b}-\frac{ax+b}{m+n}<\frac{mx-n}{a-b}-\frac{ax-b}{m-n}.$$

Résoudre les inégalités suivantes en les mettant sous forme d'un produit de facteurs dont on étudiera séparément le signe.

469. $x(x-2) > 0.$

470. $(x-2)(2x+5) > 0$

471. $(3-x)(x+2) > 0.$

472. $(2x-1)(x+2) < 0.$

473. $x^2 - 16 > 0.$

474. $(x-3)(x-5) > 2(x-3).$

475. $(x-5)^2 < (2x-3)^2.$

476. $(x-5)(x+2) < (2x+4)(3x-2).$

477. $\frac{3}{2x+1} < 0.$

478. $\frac{4x-3}{2x+1} > 0.$

479. $\frac{3x-1}{x-2} < 3.$

480. $\frac{2x-7}{3x-5} > 3.$

481. $\frac{2x-7}{-x+2} > -3.$

482. Quelle valeur faut-il donner à x pour que

$$y = \frac{2x+1}{x-2},$$

diffère de 2 de moins de 1 ? de moins de 0,1 ? de moins de 0,01 ?

483. Pour quelles valeurs du paramètre m les coefficients angulaires des droites données ci-après ont-ils une valeur positive, nulle ou négative ? En déduire la nature de l'angle que ces droites forment avec la direction Ox.

1° $y = m(m-1)x + 4.$

2° $(m-2)y + mx + m - 2 = 0.$

484. Étudier le signe du coefficient angulaire et de l'ordonnée à l'origine des droites :

1° $2mx + (2+m)y + 4 = 0$

2° $\frac{x}{m} + \frac{y}{1+m} + 2 = 0.$

CHAPITRE VI

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

§ I. GÉNÉRALITÉS.

108. DÉFINITIONS. — ***Un système d'équations est un ensemble d'équations qui doivent être vérifiées pour les mêmes valeurs des inconnues.***

Tout groupe de valeurs des inconnues vérifiant toutes les équations du système est une **solution du système.**

Exemple : $x = 5$ et $y = 2$ est une solution du système d'équations :

$$2x + y = 12,$$
$$x - y = 3.$$

Deux systèmes d'équations sont dits **équivalents**, lorsqu'ils admettent les mêmes solutions.

109. THÉORÈME. — ***Si m et n sont deux constantes quelconques telles que $n \neq 0$, le système d'équations :***

$$A = 0,$$
$$B = 0,$$

est équivalent au système :

$$A = 0,$$
$$mA + nB = 0.$$

Tout groupe de valeurs qui annulent A et B, annulent évidemment

$$mA + nB$$

et réciproquement, tout groupe de valeurs qui annulent A et mA + nB annulent nB, donc B.

Deux équations sont dites **indépendantes** lorsqu'il est impossible de les ramener l'une à l'autre par le calcul; elles sont **dépendantes** dans le cas contraire.

Exemple : Les équations $x - y = 7,$ $2x - 3y = 11$ sont indépendantes.

Les équations $2x - y = 10,$ $4x - 2y = 20$ sont dépendantes.

Deux équations sont compatibles, lorsqu'elles sont vérifiées par une même solution. Elles sont incompatibles lorsqu'il n'existe aucune solution les vérifiant toutes.

Exemple : Les équations $2x - 3y = 7$,
$x - 2y = 3$,
qui admettent la solution : $x = 5, y = 1$ sont compatibles.
Les équations : $x - y = 4$,
$3x - 3y = 5$ sont incompatibles.

§ II. SYSTÈME DE 2 ÉQUATIONS A 2 INCONNUES.

On cherche à ramener le système d'équations proposé à un système équivalent formé de deux équations à une inconnue.

110. — MÉTHODE PAR ÉLIMINATION.

Soit le système de 2 équations à 2 inconnues,

$$ax + by = c, \qquad (1)$$
$$a'x + b'y = c'. \qquad (2)$$

On suppose que b et b' ne sont pas nuls. Multiplions la première équation par b', la seconde par b, on a :

$$ab'x + bb'y = b'c,$$
$$a'bx + bb'y = bc'.$$

Si l'on retranche la seconde équation de la première, on aura :

$$(ab' - a'b)x = b'c - bc', \qquad (3)$$

Il y a deux cas à distinguer :

I. Si $ab' - a'b \neq 0$, on peut diviser par $ab' - a'b$ les deux membres et il vient :

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}.$$

En multipliant de même la première équation par a' et la seconde par a on aura :

$$aa'x + a'by = a'c,$$
$$aa'x + ab'y = ac',$$

et en retranchant membre à membre :

$$y(a'b - ab') = a'c - ac', \qquad (4)$$

et, vu l'hypothèse faite ;

$$y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'} = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Le système d'équations admet la solution unique.

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

II. Si $ab' - a'b = 0$, il y a deux cas à envisager;

1° Si $b'c - bc' = 0$, l'égalité (3) devient une identité et elle est vérifiée, pour toute valeur de x.

Le système est dit indéterminé.

$ab' - a'b = 0$ et $b'c - bc' = 0$ peuvent s'écrire :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

et l'on aura : $ac' - a'c = 0$

ce qui montre que l'équation (4) est aussi vérifiée pour toute valeur de y.

Soit m la valeur commune du rapport : $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = m$;

on en déduit : $a' = ma \quad b' = mb \quad c' = mc$.

La seconde équation peut s'écrire :

$$m(ax + by) = mc,$$

ou : $$ax + by = c.$$

La seconde équation se ramène donc à la première ; elle est dépendante de celle-ci.

Toute solution de (1) *est aussi solution de* (2) *et l'on pourra entre les deux inconnues* x *et* y, *choisir arbitrairement l'une d'elles*, x *par exemple ;* y *est alors défini par :*

$$y = \frac{c - ax}{b}. \qquad (5)$$

2° Si $ab' - a'b = 0$ et $b'c - bc' \neq 0$ il n'existe aucune valeur de x satisfaisant à l'équation (2) : **le système est impossible, les équations (1) et (2) sont incompatibles.**

Remarque. — Si l'un des coefficients a ou a', b ou b' est nul, l'une des équations se ramène à une équation à une inconnue.

Soit $b = 0$ par exemple ; on aura :

$$ax = c$$
$$a'x + b'y = c'.$$

On en déduit comme auparavant :

$$ab'y = ac' - a'c.$$

Si $a \neq 0$, et $b' \neq 0$, on a les solutions :

$$x = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad y = \frac{ac' - a'c}{ab'}.$$

Si $b = b' = 0$ et si $ac' - a'c = 0$, le système est **indéterminé ;** y est arbitraire et

$$x = \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}.$$

Si $b = b' = 0$ et si $ac' - a'c \neq 0$, le système est impossible. On raisonnerait de même dans le cas où a ou $a' = 0$.

Si enfin a = a' = b = b' = 0, *le système admet comme solutions toutes valeurs de* x *et de* y, si c = c' = 0.

Si c et c' sont $\neq 0$, le système est impossible.

111. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE.

Les relations :

$$ax + by = c \qquad (1)$$

$$a'x + b'y = c' \qquad (2)$$

sont du premier degré en x et y. Elles représentent donc les équations de deux droites D et D'.

Tout point dont les coordonnées vérifient l'équation (1) est sur la droite D.

Tout point dont les coordonnées vérifient l'équation (2) est sur la droite D'.

Résoudre le système d'équations c'est donc trouver les coordonnées du point commun à ces deux droites.

Si b et b' sont $\neq 0$, les équations peuvent s'écrire :

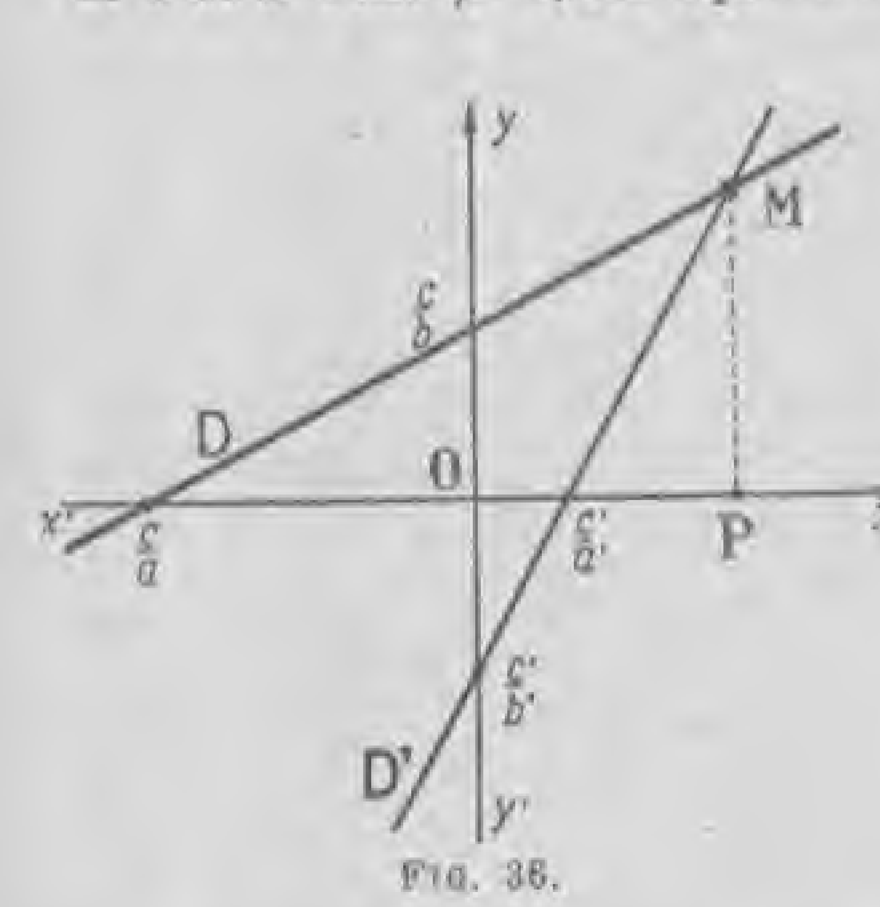


Fig. 36.

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b},$$

$$y = -\frac{a'}{b'}x + \frac{c'}{b'},$$

les droites ont pour coefficients angulaires respectifs

$$-\frac{a}{b} \text{ et } -\frac{a'}{b'},$$

et pour ordonnées à l'origine:

$$\frac{c}{b} \quad \text{et} \quad \frac{c'}{b'}.$$

1° Si $-\frac{a}{b} \neq -\frac{a'}{b'}$ ou $ab' - a'b \neq 0$, les deux droites ne sont pas parallèles, *elles admettent un seul point commun dont les coordonnées sont les solutions du système :*

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b} \qquad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

2° Si $-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$ ou $ab' - a'b = 0$, les deux droites ont même coefficient angulaire.

Si $\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$ ou $cb' - c'b = 0$, les deux droites ont même direction

et un point commun ; elles sont donc confondues (fig. 37). Elles admettent une infinité de points communs dont les coordonnées vérifient les équations (1) et (2).

Le système *est indéterminé.*

Si l'on donne l'abscisse x d'un point, son ordonnée est déterminée.

Si $\frac{c}{b} \neq \frac{c'}{b'}$ ou $b'c - bc' \neq 0$, les deux ordonnées à l'origine sont distinctes, les deux droites sont parallèles et n'admettent aucun point commun ; *le système est impossible* (fig. 38).

Fig. 37

Si l'un des coefficients b par exemple est nul, D l'une des droites est parallèle à Oy.

Si $b' \neq 0$, l'autre droite n'est pas parallèle à Oy ; il y a un point de rencontre donc un *groupe de solutions uniques* (fig. 39).

$$x = \frac{c}{a} \qquad y = \frac{ac' - a'c}{ab'}.$$

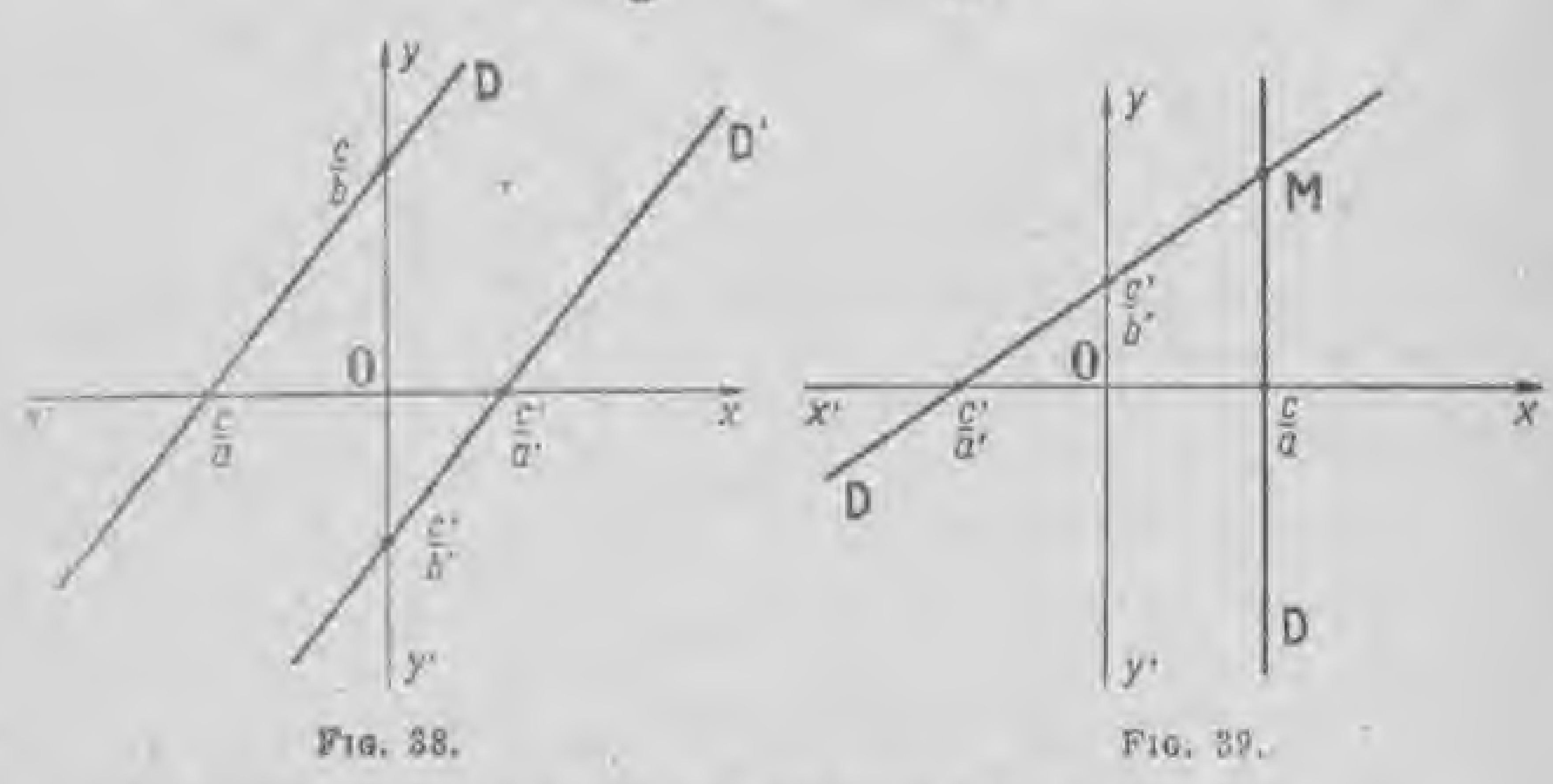


Fig. 38. Fig. 39.

Si b = b' = 0, les deux droites sont parallèles à Oy.

Si $\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$, D et D' sont confondues, *le système est indéterminé.*

Si $\frac{c}{a} \neq \frac{c'}{a'}$ D et D' sont parallèles, *le système est impossible.*

112. Exemples. — 1° *Résoudre le système :*

$$5x + 2y = 31,$$

$$4x - 3y = 11.$$

Si l'on multiplie la première équation par 4 et la seconde par 5, on aura:

$$20x + 8y = 124,$$
$$20x - 15y = 55.$$

et en les retranchant l'une de l'autre :

$$23y = 69,$$
$$y = 3.$$

De même, en multipliant la première équation par 3 et la seconde par 2, on aura :

$$15x + 6y = 93,$$
$$8x - 6y = 22,$$

d'où, par addition :

$$23x = 115,$$

ou :

$$x = 5.$$

2[e] Exemple : *Résoudre* :

$$8x + 4y = 15,$$
$$6x + 3y = 10.$$

On aura, en multipliant la première par 3 et la seconde par 4,

$$24x + 12y = 45$$
$$24x + 12y = 40.$$

Les deux équations sont incompatibles, le système est impossible.

3° *Résoudre et discuter le système d'équations*

$$mx + y = 3,$$
$$6x + (m - 1)\, y = 2m.$$

On multiplie la première équation par $(m - 1)$, on a :

$$m(m - 1)\, x + (m - 1)\, y = 3(m - 1)$$
$$6x + (m - 1)\, y = 2m$$

et en retranchant $\quad (m^2 - m - 6)\, x = m - 3.$

Si $m^2 - m - 6 \neq 0 \quad x = \dfrac{m - 3}{m^2 - m - 6}.$

Or $m^2 - m - 6$ est divisible par $m - 3$, et égale $(m - 3)\,(m + 2)$,

$$x = \frac{1}{m + 2}.$$

On obtient de même :

$$y = \frac{2(m^2 - 9)}{m^2 - m - 6} = \frac{2(m + 3)}{m + 2}.$$

Si $m^2 - m - 6 = (m + 2)\,(m - 3) = 0$, deux cas peuvent se présenter

a) $m = -2$. Alors, les deux équations s'écrivent :

$$-2x + y = 3 \quad \text{ou } 2x - y = -3,$$
$$6x - 3y = -4 \text{ ou } 2x - y = -4/3.$$

Ces deux équations sont incompatibles, le système est **impossible.**

b) $m = 3$; les deux équations deviennent :

$$3x + y = 3,$$
$$6x + 2y = 6 \quad \text{ou} \quad 3x + y = 3.$$

Ces deux équations se réduisent à une seule

$$3x + y = 3.$$

On peut choisir arbitrairement l'une des inconnues, x par exemple, alors

$$y = 3 - 3x.$$

Le système est **indéterminé.**

113. MÉTHODE PAR COMPARAISON.

Elle consiste à chercher la valeur de l'une des inconnues, y par exemple, dans chaque équation, en fonction de l'autre x. En égalant, les deux valeurs de y ainsi obtenues, on a une nouvelle équation à une seule inconnue que l'on résout ; on achève ensuite en portant la valeur de x trouvée dans l'une ou l'autre des expressions de y.

Soit à résoudre : $\quad ax + by = c,$

$$a'x + b'y = c'.$$

Si b et b' sont différents de zéro, on peut écrire :

$$y = \frac{c - ax}{b} \quad \text{et} \quad y = \frac{c' - a'x}{b'}.$$

Égalant ces deux valeurs :

$$\frac{c - ax}{b} = \frac{c' - a'x}{b'}$$
$$b'c - ab'x = c'b - a'bx$$
$$x(a'b - ab') = c'b - cb'$$

et si $a'b - ab' \neq 0, \qquad x = \dfrac{c'b - cb'}{a'b - ab'}.$

Portant cette valeur dans y, on aura :

$$y = \frac{c - \dfrac{a(c'b - cb')}{a'b - ab'}}{b} = \frac{ca'b - ac'b}{b(a'b - ab')} = \frac{ca' - c'a}{a'b - ab'}.$$

La discussion se ferait comme au paragraphe précédent.

Exemple : *Résoudre* $\quad 5x + y = 9,$

$$7x - y = 3.$$

On a : $\quad y = 9 - 5x$ et $y = 7x - 3.$

d'où :

$$9 - 5x = 7x - 3,$$
$$12x = 12, \quad x = 1.$$

et :

$$y = 9 - 5x = 4.$$

114. MÉTHODE DE SUBSTITUTION.

Elle consiste à prendre l'expression de l'une des inconnues, y par exemple, dans l'une des équations et à la porter dans l'autre. On obtient ainsi une équation en x que l'on résout. La valeur de y se déduit ensuite de celle trouvée pour x.

Soit à résoudre $\quad 2x + 3y = 19,$

$$3x - y = 12.$$

De la seconde équation, on tire :

$$y = 3x - 12.$$

Cette valeur portée dans la première équation donne

$$2x + 3(3x - 12) = 19$$

ou :

$$11x = 55$$
$$x = 5$$

et enfin :

$$y = 15 - 12 = 3.$$

§ III. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS A PLUSIEURS INCONNUES.

115. *On ramène la résolution d'un système d'équations à trois inconnues,* x, y, z *par exemple, à un système plus simple en éliminant l'une des inconnues soit* x *entre les équations proposées. On obtient alors deux équations à deux inconnues que l'on résout par l'une des méthodes précédentes. Les valeurs de* y *et* z *trouvées substituées dans l'une des équations du système donneront* x.

Exemple : *Résoudre le système d'équations*

$$2x - 3y + 5z = 11,$$
$$x + 4y - 7z = -12,$$
$$3x + 2y + 8z = 31.$$

La deuxième équation multipliée par 2 et retranchée de la première donne :

$$-11y + 19z = 35.$$

Si on la multiplie par 3 et qu'on en retranche la 3ᵉ, on a :

$$10y - 29z = -67.$$

On a le système

$$-11y + 19z = 35,$$
$$10y - 29z = -67,$$

d'où :

$$-110y + 190z = 350,$$
$$110y - 319z = -737,$$

et, par addition :

$$-129z = -387, \quad z = 3.$$

On en déduit : $10y = -67 + 87 = 20, \quad y = 2,$

et enfin : $x + 8 - 21 = -12, \quad x = 1.$

116. MÉTHODE GÉNÉRALE.

Soit à résoudre un système de n équations à n inconnues. *On élimine une des inconnues entre les* n *équations proposées, soit par substitution, soit par élimination. On obtient ainsi un système de* n — 1 *équations à* n — 1 *inconnues ; on élimine une nouvelle inconnue entre ces* n — 1 *équations que l'on ramène à un système de* n — 2 *équations à* n — 2 *inconnues et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une seule inconnue. On résout l'équation ainsi trouvée et l'on recherche par substitution les inconnues successivement éliminées.*

Remarque pratique. — Il ne faut pas se lancer trop vite dans des calculs compliqués, un examen attentif de la forme particu-

lière des équations proposées suggérera souvent des combinaisons permettant de simplifier les calculs ou montrant quelles inconnues il est préférable d'éliminer.

On pourra avoir recours parfois à certains « artifices de calcul » comme additionner un certain nombre d'équations ou avoir recours à des inconnues auxiliaires.

Nous donnerons quelques exemples simples de ces résolutions.

117. **Exemple 1** : *Résoudre les équations*

$$x + 2y - 3z + 4u = 31, \qquad (1)$$
$$3x + 3y - 4z - u = 8, \qquad (2)$$
$$2x - y - 5z + 3u = 13, \qquad (3)$$
$$2x + 2y - z + u = 17. \qquad (4)$$

On commencera par éliminer u, d'abord en ajoutant la 2ᵉ et la 4ᵉ équation, puis en ajoutant à la première la seconde multipliée par 4 et à la troisième, la seconde multipliée par 3, ce qui donne :

$$5x + 5y - 5z = 25, \qquad (1')$$
$$13x + 14y - 19z = 63, \qquad (2')$$
$$11x + 8y - 17z = 37. \qquad (3')$$

La première se réduit à :

$$x + y - z = 5.$$

En multipliant cette équation par 13 et par 11 et en la retranchant de (2)′ et (3)′ on aura :

$$y - 6z = -2,$$
$$-3y - 6z = -18,$$

d'où, par soustraction : $4y = 16, \quad y = 4 ;$

puis :

$$6z = y + 2 = 6, \quad z = 1 ;$$
$$x + 4 - 1 = 5, \quad x = 2 ;$$

et enfin : $4 + 8 - 1 + u = 17, \; u = 6.$

Exemple 2 : *Soit à résoudre*

$$\frac{1}{1 - x + y} - \frac{1}{x + y - 1} = \frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{\dfrac{1}{1 - x + y} - \dfrac{1}{1 - x - y}} = \frac{3}{4}.$$

La seconde équation se ramène immédiatement à :

$$\frac{1}{1 - x + y} - \frac{1}{1 - x - y} = \frac{4}{3},$$

ou :

$$\frac{1}{1 - x + y} + \frac{1}{x + y - 1} = \frac{4}{3}.$$

En additionnant avec la première équation, puis en retranchant on aura :

$$\frac{2}{1 - x + y} = 2, \qquad 1 - x + y = 1, \quad x - y = 0, \qquad x = y,$$

$$\frac{2}{x + y - 1} = \frac{2}{3}, \qquad x + y - 1 = 3, \quad x + y = 4, \quad x = y = 2.$$

Exemple 3 : *Résoudre*
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a},$$
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{b},$$
$$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{1}{c}.$$

Si l'on additionne les 3 équations, on a :
$$\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},$$
ou :
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right].$$

En retranchant successivement chacune des trois équations, on aura :
$$\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right]-\frac{1}{a}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right],\quad z=\frac{2abc}{a(b+c)-bc},$$
$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right]-\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{c}+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right],\quad x=\frac{2abc}{b(a+c)-ac},$$
$$\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right]-\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right],\quad y=\frac{2abc}{c(a+b)-ab}.$$

Exemple 4 : *Résoudre*
$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},$$
$$mx+ny+pz=d.$$

On peut écrire successivement en utilisant les propriétés des proportions :
$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{mx}{ma}=\frac{ny}{nb}=\frac{pz}{pc}=\frac{mx+ny+pz}{ma+nb+pc}=\frac{d}{ma+nb+pc},$$
d'où
$$x=\frac{da}{ma+nb+pc},\quad y=\frac{db}{ma+nb+pc},\quad z=\frac{dc}{ma+nb+pc}.$$

Exemple 5 : *Résoudre*
$$\frac{2}{2x-y}+\frac{1}{y+2x}=\frac{15}{7},$$
$$\frac{6}{y-2x}-\frac{5}{4x+2y}=-\frac{89}{14}.$$

Posons : $\frac{1}{2x-y}=u$ et $\frac{1}{2x+y}=v$,

on aura :
$$2u+v=\frac{15}{7},$$
$$-6u-\frac{5}{2}v=-\frac{89}{14},$$
d'où :
$$6u+3v=\frac{45}{7},$$
$$3v-\frac{5}{2}v=\frac{v}{2}=\frac{1}{14},\quad v=\frac{1}{7},$$
$$u=1.$$

Et enfin :
$$2x-y=1,\quad 2x+y=7,$$
$$4x=8,\quad x=2\quad y=3.$$

§ IV. *INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A DEUX INCONNUES.*

118. ***Une inéquation du premier degré à deux inconnues est une inégalité de la forme :***
$$ax+by+c>0 \quad \text{ou} \quad ax+by+c<0,$$
où a et b sont des constantes données.

On peut, pour les résoudre, se servir utilement de la méthode graphique basée sur la propriété suivante :

La droite D qui représente l'équation $ax+by+c=0$ partage le plan en deux régions. Quand on substitue à x et y dans l'expression $ax+by+c$, les coordonnées d'un point de l'une des régions, le résultat de la substitution est positif pour l'une des régions, négatif pour l'autre.

1° **$b \neq 0$.** *La droite D n'est pas parallèle à Oy.*

La parallèle à l'axe des y menée par un point $M_1(x_1, y_1)$ quelconque rencontre D en $Q(x_1, y)$ et Ox en $P(x_1, 0)$.

Soit $D_1 = ax_1 + by_1 + c$

Q étant sur D, on a :
$$0 = ax_1 + by + c.$$

En retranchant ces deux égalités, on a :
$$D_1 = b(y_1 - y) = b(\overline{PM_1} - \overline{PQ})$$
$$D_1 = b.\overline{QM_1}.$$

D_1 aura le signe de b si $\overline{QM_1}$ est positif, c'est-à-dire si M_1 est au-dessus de la droite, le signe de $-b$ si $\overline{QM_1}$ est négatif, c'est-à-dire si M_1 est en dessous de la droite.

Fig. 40.

Cette propriété permet de trouver facilement dans quelle région du plan doit être situé un point M pour que l'on ait :
$$ax+by+c>0 \quad \text{ou} \quad ax+by+c<0.$$

Remarque. — Si $c \neq 0$, à l'origine O, le polynôme se réduit à c, donc la région positive sera celle qui contient l'origine si $c>0$, celle qui ne la contient pas si $c<0$.

2° **Si $b = 0$,** *la droite est parallèle à l'axe Oy.*

Elle divise le plan en deux régions, celle où les abscisses sont supérieures à $-\frac{c}{a}$ et celle où les abscisses sont inférieures à $-\frac{c}{a}$ et résolvent les inégalités :
$$ax+c>0 \quad \text{et} \quad ax+c<0.$$

En traçant les droites représentées par l'une ou l'autre de ces équations, on pourra déterminer la région du plan dont les abscisses ou les ordonnées vérifient l'inégalité proposée.

Application. — *Soit à résoudre l'inéquation*

$$2x - 3y + 6 > 0. \quad (1)$$

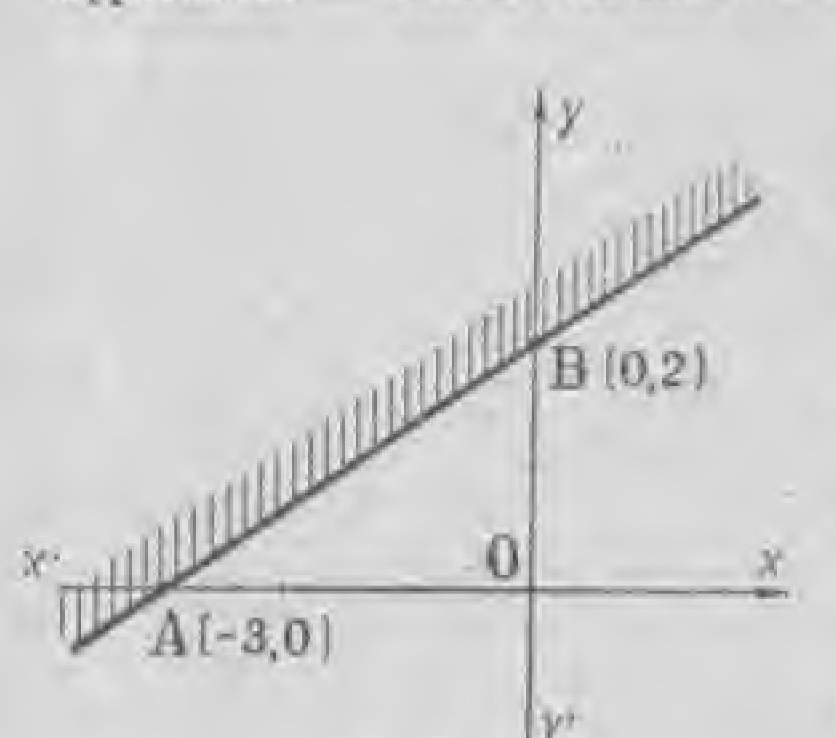


FIG. 41.

La droite $2x - 3y + 6 = 0$ coupe l'axe Ox au point $A(-3,0)$ et l'axe Oy au point $B(0,2)$.

La région qui contient l'origine satisfait à la condition (1), car pour

$$x = 0 \quad \text{et} \quad y = 0$$

(1) devient : $6 > 0$.

On a hachuré la région qui ne convient pas.

119. RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME D'INÉQUATIONS SIMULTANÉES DU PREMIER DEGRÉ A DEUX INCONNUES.

Règle. — Pour résoudre un système d'inéquations simultanées du premier degré à deux inconnues, il faut :

1° Ramener chacune des inéquations à l'une des deux formes :

$$ax + by + c > 0, \qquad (1)$$

ou

$$ax + by + c < 0. \qquad (2)$$

2° Construire les droites dont l'équation est obtenue en égalant à 0 les premiers membres des inéquations.

3° Déterminer séparément la région du plan des coordonnées qui convient à chacune des inéquations et pour cela hachurer celle qui ne convient pas.

4° Les régions non hachurées sont celles dont les points ont des coordonnées qui satisfont simultanément à toutes les inéquations.

Application. — *Résoudre graphiquement le système :*

$$y - 3x < 0, \quad (1)$$
$$x + 2y - 5 > 0, \quad (2)$$
$$5x + 2y + 10 > 0, \quad (3)$$

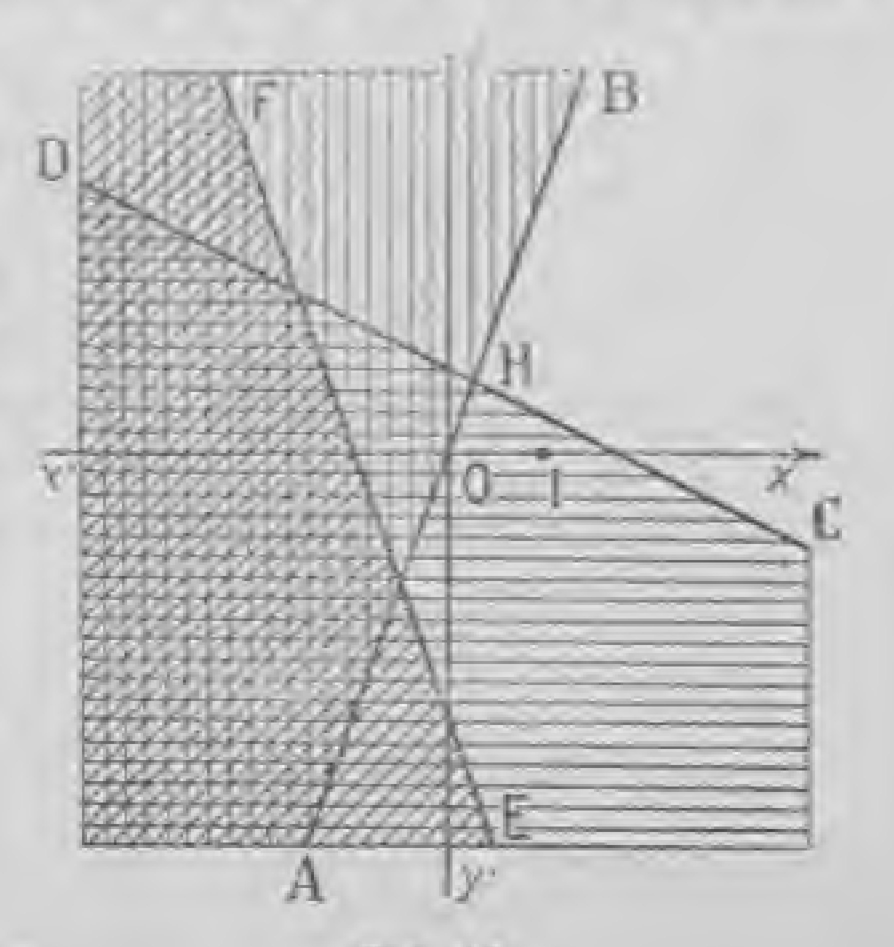


FIG. 42.

Construisons les droites AB, CD, EF, représentées par les équations :

$$y - 3x = 0, \quad x + 2y - 5 = 0, \quad 5x + 2y + 10 = 0.$$

En remplaçant x et y par les coordonnées ($x = 3$, $y = 0$) du point I (fig. 42), on constate que les premiers membres des inéquations (1) et (2) sont négatifs ; celui de l'inéquation (3) est positif.

La première inéquation est donc vérifiée à droite de AB ; la deuxième, à droite de CD ; la troisième, à droite de EF. Les régions opposées ayant été couvertes de hachures, les points situés dans l'angle CHB sont les seuls dont les coordonnées vérifient le système proposé.

120. INÉQUATIONS POUVANT ÊTRE RAMENÉES A CELLES DU PREMIER DEGRÉ.

— *De telles inéquations peuvent toujours être ramenées à la forme suivante :*

$$(ax + by + c)(a_1x + b_1y + c_1)\dots(a_nx + b_ny + c_n) \gtrless 0, \quad (1)$$

ne comprenant que des facteurs du premier degré.

Pour déterminer les points du plan des coordonnées xOy qui satisfont à l'une des conditions (1), il faut d'abord construire chacune des droites correspondant aux facteurs du premier membre égalés à zéro, puis, déterminer le signe de ce dernier dans une des régions, en choisissant de préférence celle qui contient l'origine des coordonnées. Il suffit alors d'alterner les signes lorsque le point franchit une des droites. On hachure les régions dont les points ne satisfont pas à l'inégalité donnée.

Exemple. — *Soit à résoudre l'inéquation :*

$$(4x - 2y - 8)(-x - y + 2)(x + 2y + 6) < 0. \qquad (1)$$

Les droites figuratives des divers facteurs du premier membre de (1) sont respectivement : AB, BC et EQ.

L'origine O conduit à la condition :

$$-96 < 0,$$

et satisfait à l'inégalité (1).

La figure 43 donne les régions dont les points ont des coordonnées satisfaisant à la condition (1).

Ce sont :

EGBC, AGFL et QFBP.

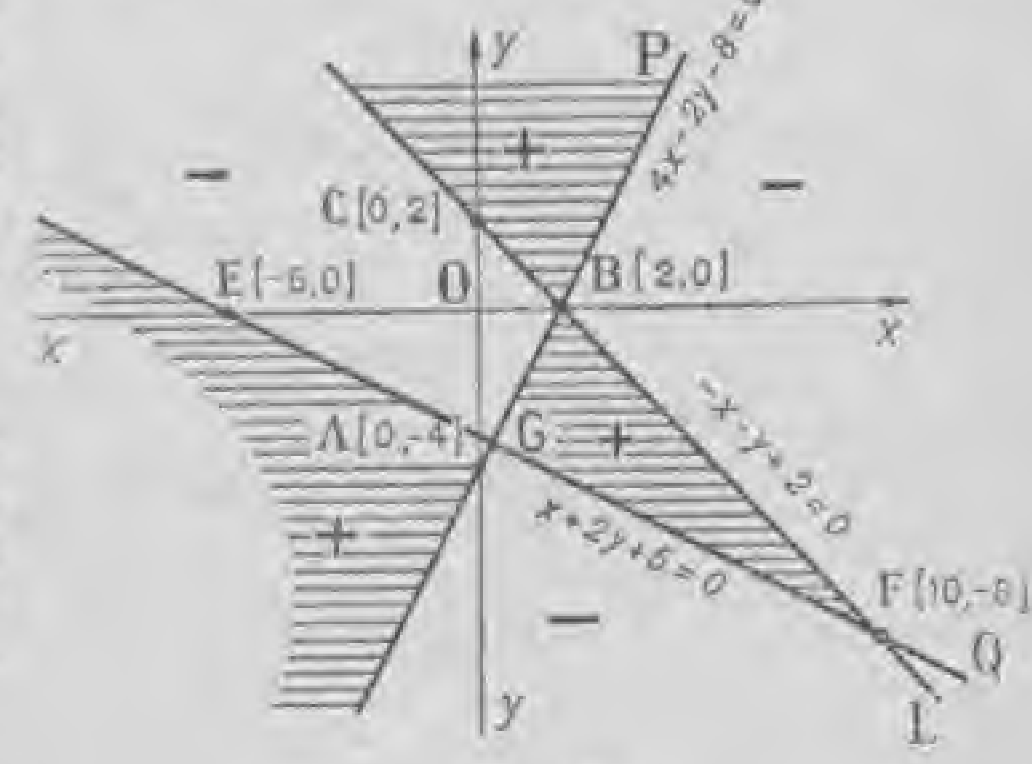


FIG. 43.

Les points limites de ces régions ont respectivement pour coordonnées :

$$B(2,0), \quad F(10, -8), \quad G\left(\frac{2}{5}, -\frac{16}{5}\right).$$

Remarque. — Certains facteurs du premier degré peuvent figurer dans l'inégalité à une puissance quelconque. Si la puissance est

paire, on élimine le facteur correspondant, car une telle puissance est toujours positive ; si elle est impaire, elle a même signe que le facteur lui-même ; on ne conservera donc que ce dernier.

Ainsi $(2x - 3y + 2)^2 (x - 4)^2 (y - 2x + 8) > 0$
est équivalent à $(2x - 3y + 2)(y - 2x + 8) > 0$.

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

Équations à deux inconnues

Résoudre les équations à coefficients numériques suivants :

485. $10x + 4y = 3,\quad 20y - 5x = 4.$

486. $x - 3y = 1,\quad \frac{3x}{4} - y = 2.$

487. $\frac{x}{y} = \frac{3}{4},\quad 5x - 4y = -3.$

488. $\frac{x+y}{4} + \frac{x-y}{2} = 3,\quad \frac{12x - 7y}{13} = 3.$

489. $\frac{x+y}{5} = \frac{x-y}{3};\quad \frac{x}{2} = y + 2.$

490. $\frac{6}{x} + \frac{2}{y} = 3,\quad \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -1.$

491. $2\left(\frac{3}{x} - \frac{2}{y}\right) = 13,\quad \frac{1}{x} - \frac{9}{y} = -4.$

492. $\frac{x+y}{3} + \frac{2}{3} = 5.\quad \frac{4x-y}{6} + \frac{x}{4} - 2 = -1.$

493. $2x + \frac{y-2}{5} = 21,\quad 4y + \frac{x-4}{6} = 29.$

494. $\frac{x+y}{3} + \frac{y-x}{2} = 9,\quad \frac{x}{2} + \frac{x+y}{9} = 5.$

495. $2(2x + 3y) = 3(2x - 3y) + 10,\quad 4x - 3y = 4(6y - 2x) + 3.$

496. $\frac{x+2}{7} + \frac{y-x}{4} = 2x - 8,\quad \frac{2y-3x}{3} + 2y = 3x + 4.$

497. $\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = \frac{14}{3},\quad 3x - \frac{y}{2} + \frac{x}{4} = 24.$

498. $\frac{12}{x + 2y - 4} = \frac{3}{x - 2y},\quad \frac{x}{3} - \frac{y}{2} + 5 = 3y.$

499. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{20}{xy},\quad \frac{x-y}{8} = \frac{1}{2}.$

500. $\frac{1}{4x} + \frac{1}{3y} = 2,\quad \frac{1}{y} - \frac{1}{2x} = 1.$

501. $\frac{x+2}{7} + \frac{y-x}{4} = 2x - 8,\quad \frac{2y-3x}{3} + 2y = 3x + 4.$

502. $\frac{x+y}{3} - \frac{5x-4y}{6} = 0,\quad \frac{x+2y-1}{6} = \frac{5x-9y+4}{10}.$

Résoudre les équations littérales suivantes :

503. $(a + c)x - by = bc \quad x + y = a + b.$

504. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = c \quad \frac{x}{b} - \frac{y}{a} = 0.$

505. $(a + b)x - (a - b)y = 4ab$
$(a - b)x + (a + b)y = 2a^2 - 2b^2.$

506. $\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b}$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}.$

507. $(a + b)x + (a - b)y = 2ab,$
$(a + c)x + (a - c)y = 2ac.$

508. $(a + 2b)x - (a - 2b)y = 6ac,$
$(a + 3c)y - (a - 3c)x = 4ab.$

509. $(a^2 + 1)x + (a^2 - 1)y = a,$
$(a + 1)x + (a - 1)y = a^2.$

510. $(b^2 - a^2)x + a(a + b)y = b + 2a.$
$(b^2 - a^2)(3x + 5y) = 8b - 2a.$

511. $a(x + y) + b(x - y) = c,$
$a(x - y) + b(x + y) = d.$

512. $x + y = 1 + \frac{2bx}{a+b},\quad x - y = 1 + \frac{2by}{a-b}.$

513. $(a - 1)^2 x + (a^2 - 1)y = (a + 1)^2.$
$(2a - 1)x + (a - 1)y = a^2 - 1.$

514. $(a - 1)x + (a + 1)y = 3(a^2 - 1).$
$(a^2 - 1)x + (a^2 + 1)y = 2(a^3 - 1).$

Résoudre et discuter les systèmes d'équations suivantes dont les coefficients dépendent d'un paramètre.

515. $(m - 2)x + (2m - 1)y = 4,$
$\frac{m}{2}x + (m - 1)y = 3.$

516. $4x - my = m - 4,$
$(2m + 6)x + y = 2m + 1.$

517. $4x - my = 6 + m,$
$mx - y = 2m.$

518. $m(m + 2)x - m(m - 3)y = 3,$
$m(m - 3)x - m(m + 2)y = -2.$

519. $(m-5)x-(2-m)y=m^2-4,$
$(m+2)x+(2m+4)y=m^2-m-6.$

520. $ax-6y=5a-3,$
$2x+(a-7)y=29-7a.$

Ce système peut-il admettre pour solution $x=y$.

521. Pour quelles valeurs de a et b, le système
$(a+b)x+(a-b)y=15,$
$(2a-3b)x+(2a-5b)y=a+2b$
admet-il la solution $x=3$, $y=-7$?

522. Pour quelles valeurs de m le système
$2x-5y=3,$
$(m+2)x+(4-m)y=1+m$
admet-il la solution pour laquelle $y=3x$.

Résoudre et interpréter graphiquement la résolution et la discussion des équations suivantes :

523. $3x-y=1,$
$2y-x=8.$

524. $x-y=1,$
$\frac{2x}{5}+\frac{3y}{4}=5.$

525. $mx-4y=5,$
$(m-2)x+\frac{y}{2}=4.$

526. $\frac{x}{m}-\frac{y}{m-2}=\frac{3}{m},$
$(x+y)m=1-3m.$

527. $\frac{x}{3-m}+\frac{y}{m}=\frac{2}{m},\quad \frac{x}{m-1}-\frac{y}{m-2}=\frac{5}{2-m}.$

528. Pour quelles valeurs de m et n les deux droites
$(2m-2)x+5my=15 \quad mx-(2n-1)y=9$
sont-elles confondues ?

529. Pour quelles valeurs de m les deux droites
$5x-(m+2)y=4n,$
$x+(3-m)y=n+6$
sont-elles parallèles ? Pour quelles valeurs de m et n sont-elles confondues ?

530. Étant donné le système :
$mx+2y=8,$ (1)
$x+(m-1)y=4,$ (2)

1° Résoudre en supposant m connu ;
2° Discuter d'après les différentes valeurs de m.
3° Pour la valeur $m=-1$, construire sur un même graphique les droites qui représentent les fonctions (1) et (2).
4° Tracer les droites qui correspondent à la valeur $m=+2$ et dire si les graphiques obtenus ne peuvent pas servir à expliquer les résultats de la discussion.

Équations à plus de 2 inconnues

531. $x+y+z=11,$
$2x-y+z=5,$
$3x+2y+z=24.$

532. $x-y+z=7,$
$x+y-z=1,$
$y+z-x=3.$

533. $x+4y-8z=-8,$
$4x+8y-z=76,$
$8x-y-4z=110.$

534. $x+y-6z=9,$
$x-y+4z=5,$
$3y-2x-z=4.$

535. $2x+y-4z=14,$
$5y-x-z=1,$
$2x-4y+5z=13.$

536. $2x-2y+3z=16,$
$3x+5y-2z=6,$
$4x+3y-4z=-1.$

537. $2x+7y-11z=10,$
$5x-10y+3z=-15,$
$-6x+12y-z=31.$

538. $\frac{x+2y}{5x+6z}=\frac{7}{9},$
$\frac{3y+4z}{x+2y}=\frac{8}{7},$
$x+y+z=128.$

539. $\frac{5x+7y}{x+y}=6,$
$\frac{3(z-x)}{x-y+z}=1,$
$\frac{2x+3y-z}{\frac{x}{2}+3}=4.$

540. $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{2z}{7}=58,$
$\frac{5x}{4}+\frac{y}{6}+\frac{z}{3}=76,$
$\frac{x}{2}-\frac{y}{5}+\frac{7z}{40}=\frac{147}{5}.$

541. $x+y+z=a+b,$
$\frac{1}{x-y}=\frac{1}{2b},$
$\frac{x}{y-z}-\frac{1}{2}=\frac{b}{a-b}.$

542. $x+y+z=0.$
$(b+c)x+(a+c)y+(a+b)z=0.$
$bcx+acy+abz=1.$

543. $3x+6y-2z+9u=6,$
$4y-5x+5z-6u=5,$
$2z-3x+8y-3u=3,$
$9u+10y+3z-4x=9.$

544. $x-2y+3z-4u=-8,$
$y-2z+3u-4x=6,$
$z-2u+3x-4y=-8,$
$u-2x+3y-4z=-2.$

545. $4x-3z+u=10,$
$5y+z-4u=1,$
$3y+u=17,$
$x+2y+3u=25.$

546. $x+y+2z+u=3,$
$2y+3z+4u=4,$
$5z-6u=1,$
$5x-4y=2.$

547. $4x-3z=10,$
$2y-5u=5,$
$z+3v=19,$
$3x+y=13,$
$2y-3u=11.$

548. $x+y=16,$
$x+z=22,$
$y+z=28.$

549. $x+y+z=15,$
$x+y+t=16,$
$x+z+t=18,$
$y+z+t=20.$

550. $\frac{x+y-1}{x-y+1}=a,$
$\frac{y-x+1}{x-y+1}=ab.$

551. $\frac{x}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z}{18}.$
$3x + 5y + z = 34.$

552. $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{u}{d}.$
$ax + by + cz + du = \frac{a}{b}.$

553. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}.$
$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{20}.$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{15}.$

554. $\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} = m.$
$\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = n.$

555. $a(x+y) - b(x-y) = 2a,$
$a(x-y) - b(x+y) = 2b.$

556. $\frac{1}{3x-2y+1} + \frac{1}{x+2y-3} = \frac{5}{12}.$
$\frac{1}{x+2y-3} - \frac{1}{3x-2y+1} = \frac{1}{12}.$

557. $5\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 3,$
$25x - 9y = 81.$

558. $\frac{xy}{x+y} = \frac{12}{5}.$
$\frac{yz}{y+z} = \frac{18}{5}.$
$\frac{xz}{x+z} = \frac{36}{13}.$

559. $\frac{xy}{5x+4y} = 6,$
$\frac{xz}{3x+2z} = 8,$
$\frac{yz}{3y+5z} = 6.$

560. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5,$
$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2xy.$

561. $\frac{xy}{ay+bx} = c,$
$\frac{xz}{az+cx} = b.$
$\frac{yz}{bz+cy} = a.$

562. $\frac{x-a}{b+c} = \frac{y-b}{a+c} = \frac{z-c}{a+b}.$
$mx + ny + pz = d.$

563. $x + y + z = 1,$
$ax + by + cz = k.$
$a^2x + b^2y + c^2z = k^2.$

564. $a^3x + a^2y + az - 1 = 0,$
$b^3x + b^2y + bz - 1 = 0,$
$c^3x + c^2y + cz - 1 = 0.$

565. $x - ay + a^2z = a^3,$
$x - by + b^2z = b^3,$
$x - cy + c^2z = c^3.$

566. $x(y+z) = a,$
$y(z+x) = b,$
$z(x+y) = c.$

Inégalités à deux inconnues

Résoudre graphiquement les inégalités :

567. $2x + y - 1 > 0.$

568. $x - 2y + 3 > 0$

569. $3x - y + 2 < 0.$

570. $3x - 2y + 6 > 0.$

571. $(x-2) + 2(y-1) > 2x + 4.$

572. $(3x+y) - 2(x-y) > 5$

Trouver les points du plan xOy qui vérifient simultanément les deux inégalités :

573. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 1 > 0.$
$y - 2x - 6 > 0.$

574. $3x - y + 1 > 0$
$x - 2y - 3 < 0.$

575. $x - y + 1 < 0.$
$3y + 2x - 5 > 0.$

576. $4x - 3y + 7 < 0$
$2x + 2y + 1 < 0.$

577. $2(x-1) + \frac{y}{2} > 4.$
$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 < 0.$

Quelles sont les régions du plan xOy qui satisfont aux trois conditions suivantes :

578. $x + y - 1 > 0$
$x - 2 < 0$
$y - 3 > 0.$

579. $2x - y - 1 > 3$
$x - y > 0$
$3x + 2y + 1 > 0.$

580. $4x - 5y + 20 < 0.$
$x < y - 5.$
$-y + 5 < \frac{x}{3} - 1.$

Où doit être situé le point $M(x, y)$ pour que ses coordonnés satisfassent à la condition

581. $(x - y + 4)(2x - 3y + 6) > 0.$

582. $\frac{x+y-1}{5x+9y-45} < 0.$

583. $\frac{1}{4-x+y} - \frac{2}{2x-y+3} > 0.$

584. Déterminer le signe du coefficient angulaire de la droite
$$(a+b+1)x + (2a-b)y = 2a+3$$
lorsque le point $M(a, b)$ se déplace dans le plan Oab.

585. On donne la droite
$$(2a-3b)x - (2-a)y = 3a+b+5$$
dont les coefficients dépendent des coordonnées d'un point $M(a, b)$. Déterminer les signes de l'ordonnée à l'origine suivant la position du point M.

CHAPITRE VII

PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ

121. **MÉTHODE DE RÉSOLUTION.** — La résolution des problèmes d'algèbre comporte quatre parties :

1° Le choix des inconnues.
2° La mise en équations.
3° La résolution des équations.
4° La discussion des résultats.

Choix des inconnues. — Les inconnues seront choisies de telle façon qu'elles conduisent simplement au résultat et déterminent sans ambiguïté la solution du problème.

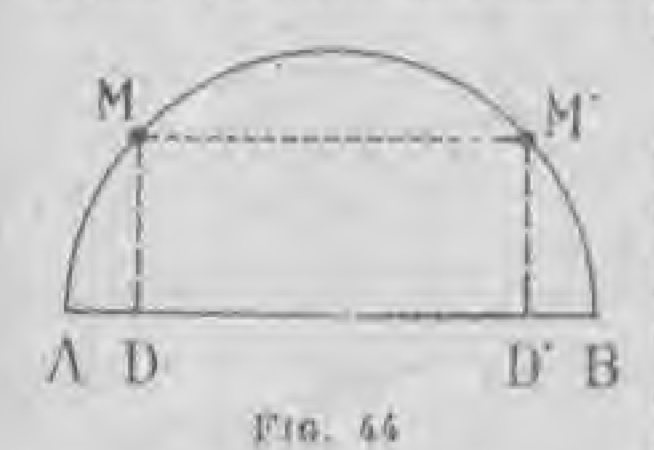


Fig. 44

L'on demande par exemple de déterminer un point M sur une demi-circonférence de diamètre AB : on évitera de prendre comme inconnue la longueur MD, car la connaissance de cette distance ne détermine pas complètement le point M ; le point M', qui est à la même distance de AB, répond aussi bien à la question. Mais on pourra prendre comme inconnue la distance AD, car une fois le point D connu, la position du point M est parfaitement déterminée.

Les inconnues choisies, on les représentera par les dernières lettres de l'alphabet : x, y, z...

Mise en équations. — Mettre un problème en équations, c'est écrire les relations que doivent vérifier les inconnues pour satisfaire aux conditions imposées par le problème. Ces équations sont fournies, soit par l'énoncé, soit par l'application de certaines propriétés algébriques ou géométriques.

On doit toujours avoir un nombre d'équations indépendantes égal au nombre des inconnues.

Résolution des équations. — Cette question a été traitée aux chapitres V et VI pour les équations du premier degré ; elle le sera plus loin pour les équations d'un degré supérieur.

Discussion des problèmes. — La nature du problème peut exiger que les inconnues satisfassent à certaines conditions de grandeur et de signe *que les équations du problème sont impuissantes à traduire.* Ainsi, elle peut exiger que l'inconnue soit entière, positive, comprise entre certaines limites, etc. Les solutions des équations ne sont solutions du problème que si elles satisfont à ces conditions.

Quand les données sont numériques, on examine si les résultats obtenus satisfont aux conditions imposées par l'énoncé. Si certaines données sont représentées par des lettres, on recherche les relations qui doivent exister entre les données pour que le problème admette une ou plusieurs solutions, c'est ce qu'on appelle **discuter le problème.**

Lorsqu'un problème n'admet aucune solution, on dit qu'il est **impossible** ; il est **indéterminé** s'il en admet une infinité.

§ I. PROBLÈMES NUMÉRIQUES.

122. *Problème I. — Une marchande, qui avait un panier d'œufs, en vend $\frac{2}{9}$ moins 5 œufs. Si elle ajoute 37 œufs à ceux qui lui restent, la contenance primitive du panier sera augmentée de $\frac{1}{6}$. Combien le panier contenait-il d'œufs ?*

Soit x le nombre d'œufs du panier. La marchande en ayant vendu les $\frac{2}{9}$ moins 5 œufs, il lui reste :

$$\frac{7x}{9} + 5.$$

En ajoutant 37 à ce reste, le nombre primitif x sera augmenté de $\frac{1}{6}$; de là l'équation :

$$\frac{7x}{9} + 5 + 37 = \frac{x}{6} + x = \frac{7x}{6},$$

ou

$$\frac{7x}{9} + 42 = \frac{7x}{6}.$$

Multiplions tous les termes par 18, p. p. c. m. des dénominateurs :

$$14x + 756 = 21x,$$
$$14x - 21x = -756,$$
$$-7x = -756.$$

En changeant les signes des deux membres et en divisant par 7, nous trouvons :

$$x = \frac{756}{7} = 108.$$

123. *Problème II. — Un père partage une somme de la manière suivante : à l'aîné de ses fils il donne 1 000 francs plus $\frac{1}{7}$ du reste ; au cadet, 2 000 francs plus le $\frac{1}{7}$ du deuxième reste ; et ainsi de suite. Trouver le bien du père, le nombre d'enfants et la part de chacun, sachant que les parts sont égales.*

Soit x la somme à partager
La part du premier sera :

$$1\,000 + \frac{x - 1\,000}{7} \quad \text{ou} \quad \frac{x + 6\,000}{7};$$

celle du deuxième sera :

$$2\,000 + \frac{1}{7}\left[x - \left(\frac{x + 6\,000}{7}\right) - 2\,000\right].$$

Puisque les parts sont égales, nous avons l'équation :

$$\frac{x + 6\,000}{7} = 2\,000 + \frac{1}{7}\left[x - \left(\frac{x + 6\,000}{7}\right) - 2\,000\right],$$

ou $\quad 7x + 42\,000 = 98\,000 + 7x - x - 6\,000 - 14\,000,$

ou $\quad x = 36\,000.$

Réponse. — La somme était de 36 000 francs.

Le premier a eu :

$$\frac{x + 6\,000}{7} = \frac{42\,000}{7} = 6\,000 \text{ francs.}$$

Comme les parts sont égales, le nombre d'enfants est :

$$\frac{36\,000}{6\,000} = 6.$$

124. *Problème III. — Déterminer un nombre compris entre* 400 *et* 500, *sachant que la somme de ses chiffres est* 9 *et que le nombre renversé n'est plus que les* $\frac{36}{47}$ *du nombre primitif.*

Le nombre cherché étant compris entre 400 et 500, le chiffre des centaines est 4, la somme des deux autres est donc 5.

En désignant par x le chiffre des dizaines et par y celui des unités, on a

$$x + y = 5. \qquad (1)$$

La seconde condition exprimée dans le problème donne l'équation :

$$100y + 10x + 4 = \frac{36}{47}(100 \times 4 + 10x + y) ;$$

d'où $\quad 4\,664y + 110x = 14\,212. \qquad (2)$

Le système des équations (1) et (2) a pour solution :

$$x = 2 \quad \text{et} \quad y = 3.$$

Le nombre cherché est 423.

125. *Problème IV. — Trois joueurs conviennent que le perdant doublera l'argent des deux autres ; ils jouent trois parties, en perdent chacun une, et se retirent chacun avec* 16 *francs. Combien chaque joueur avait-il en se mettant au jeu ?*

Représentons par x, y, z les sommes que possèdent les joueurs en se mettant au jeu.

Après la première partie perdue par le premier, les joueurs ont respectivement :

$$1^{\text{er}}\ x - y - z, \quad 2^{\text{e}}\ 2y, \quad 3^{\text{e}}\ 2z.$$

Après la deuxième partie, perdue par le second joueur :

$$1^{\text{er}}\ 2x - 2y - 2z, \quad 2^{\text{e}}\ 3y - x - z, \quad 3^{\text{e}}\ 4z.$$

Après la troisième partie :

$$1^{\text{er}}\ 4x - 4y - 4z, \quad 2^{\text{e}}\ 6y - 2x - 2z, \quad 3^{\text{e}}\ 7z - x - y.$$

Or, chaque joueur a 16 francs après la troisième partie ; on a donc les trois équations :

$$4x - 4y - 4z = 16, \qquad (1)$$
$$6y - 2x - 2z = 16, \qquad (2)$$
$$7z - x - y = 16, \qquad (3)$$

système facile à résoudre.

On opère plus rapidement en remarquant que les joueurs ont ensemble 48 francs ; d'où l'équation

$$x + y + z = 48.$$

En lui ajoutant l'équation (1) divisée par 4, on a

$$2x = 52 \text{ ; d'où } x = 26,$$

$$x = 26 \text{ francs ; } \quad y = 14 \text{ francs ; } \quad z = 8 \text{ francs.}$$

126. Problèmes indéterminés ou impossibles. — *Problème I. — Trouver les dimensions d'un rectangle, sachant que si l'on augmente la base de* 2 *mètres et la hauteur de* 6 *mètres, la surface augmente de* 96 *mètres carrés, et si l'on diminue la base de* 5 *mètres et la hauteur de* 15 *mètres, la surface diminue de* 135 *mètres carrés.*

Soient x la base et y la hauteur. Les équations du problème sont :

$$\left.\begin{array}{l}(x + 2)(y + 6) = xy + 96 \\ (x - 5)(y - 15) = xy - 135\end{array}\right\} \text{I}$$

ou, en simplifiant,

$$\left.\begin{array}{l}3x + y = 42 \\ 3x + y = 42\end{array}\right\} \text{II}$$

Discussion. — Nous n'avons, pour déterminer les deux inconnues qu'une seule équation. Le système I est donc indéterminé, mais toutes les valeurs de x et de y qui vérifient les équations I ne conviennent pas au problème.

En effet, écrivons l'une des équations du système II sous la forme :

$$y = 42 - 3x = 3(14 - x) ;$$

y devant être positif, on doit prendre $x < 14$.

Il faut, d'après l'énoncé $\quad y > 15$

ce qui exige $\quad 3(14 - x) > 15$

ou $\quad x < 9$

D'autre part, il faut $\quad x > 5,$

d'où les seules valeurs acceptables de x vérifient l'inégalité :

$$5 < x < 9.$$

127. *Problème II. — Un bassin peut être rempli par un robinet en* 8 *heures, par un autre robinet en* 12 *heures, et il peut être vidé par un conduit en* 4 *heures* 48 *minutes. On suppose le bassin vide, et on ouvre en même temps les deux robinets et le conduit. Dans combien de temps sera-t-il rempli ?*

Soit x le nombre d'heures au bout desquelles le bassin sera rempli.

Le premier robinet remplit en une heure une fraction du bassin égale à $\frac{1}{8}$; en x heures, il remplira une fraction égale à $\frac{x}{8}$.

Pendant ce même temps, le second robinet remplira une fraction du bassin égale à $\frac{x}{12}$.

Le conduit peut vider le bassin en 4 h 48 m ou 4 h $\frac{48}{60}$ = 4 h $\frac{4}{5} = \frac{24}{5}$

d'heures ; en une heure il vide une fraction égale à $\frac{5}{24}$, et en x heures $\frac{5x}{24}$.

La contenance du bassin étant représentée par 1, on a l'équation :

$$\frac{x}{8}+\frac{x}{12}=\frac{5x}{24}+1,$$

ou

$$\frac{5x}{24}=\frac{5x}{24}+1 ;$$

c'est-à-dire

$$0 \times x = 1$$

Cette équation ne pouvant être vérifiée par aucune valeur de x, le problème est *impossible.*

On peut se rendre compte de cette impossibilité en remarquant que la fraction du bassin remplie en une heure par les deux robinets coulant ensemble est $\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{5}{24}$; c'est précisément la fraction que le conduit vide en une heure ; le gain égale donc la perte, et le bassin ne peut se remplir.

128. Problèmes à données généralisées. — *Problème I. — Trouver la vitesse et la longueur d'un train qui a mis 7 secondes pour passer devant un observateur immobile et 25 secondes pour traverser une gare de 378 mètres de longueur.*

Généraliser le problème en remplaçant les nombres 7, 25 et 378 par t, T, L.

Soient x la vitesse en mètres par seconde et y la longueur en mètres du train

Lorsque l'avant du train passe devant l'observateur, l'arrière du train est à une distance égale à la longueur y du train, et franchira cet espace en 7 secondes à la vitesse x ; d'où l'équation :

$$y = x \times 7. \qquad (1)$$

Lorsque le train aura entièrement traversé la gare, l'avant du train se trouvera à une distance y au delà de la gare. Donc en 25 secondes l'avant du train aura parcouru $(378 + y)$ mètres. D'où l'équation de la vitesse :

$$x=\frac{378+y}{25} \qquad (2)$$

Remplaçons y par sa valeur dans l'équation (2) :

$$x=\frac{378+7x}{25}$$

d'où

$$x = 21.$$

Par suite

$$y = 21 \times 7 = 147.$$

Réponse. — Le train a une vitesse de 21 mètres par seconde et une longueur de 147 mètres.

Généralisation. — Soient x et y la vitesse et la longueur cherchées. On a :

$$y = xt, \qquad (1)$$

et

$$x=\frac{L+y}{T}. \qquad (2)$$

Remplaçons y par sa valeur dans l'équation (2) :

$$x=\frac{L+xt}{T} ;$$

d'où

$$xT - xt = L,$$

$$x(T - t) = L,$$

$$x=\frac{L}{T-t}.$$

Portons cette valeur de x dans l'équation (1) ; on trouve :

$$y=\frac{Lt}{T-t}.$$

§ II. INTERPRÉTATION DES SOLUTIONS NÉGATIVES.

129. — Dans certains problèmes où l'inconnue est susceptible d'être comptée dans deux sens différents (temps, distances, degrés de température), on arrive parfois à un résultat négatif alors que l'énoncé demande une solution positive. Le plus souvent, ce résultat négatif indique que, dans l'énoncé, on a fait sur le sens de l'inconnue une supposition inexacte.

Interpréter ce résultat, c'est modifier l'énoncé de telle façon que la valeur absolue du résultat devienne la solution du nouveau problème.

Problème I. — Un père a 39 ans, et son fils en a 15 ; dans combien de temps l'âge du père sera-t-il le triple de celui de son fils ?

Soit x le temps cherché ; après x années, l'âge du père sera $39 + x$, et celui du fils $15 + x$;

donc

$$39 + x = 3(15 + x).$$

En résolvant, on trouve $x = -3$.

Interprétation de cette valeur négative. — Le résultat trouvé prouve que le problème, tel qu'il est posé, est *impossible*, c'est-à-dire que l'âge du père ne pourra jamais être, dans l'avenir, le triple de l'âge du fils. Mais ce qui ne peut avoir lieu dans l'avenir a pu avoir lieu dans le passé.

Il suffit de modifier l'énoncé de la façon suivante :

Un père a 39 ans et son fils en a 15 ; à quelle époque l'âge du père était-il le triple de celui du fils ?

Remarque. — Il peut arriver qu'une hypothèse inexacte sur le sens de l'inconnue ait été faite, non dans l'énoncé, mais dans la mise en équation du problème. Dans ce cas, l'interprétation consiste à modifier cette hypothèse de façon que la valeur absolue du résultat soit la solution du problème proposé.

Problème II. — Deux mobiles, qui font respectivement 10 kilomètres et 8 kilomètres à l'heure, partent en même temps des points A et B, et se dirigent suivant la droite X'X vers un point fixe C, dont

ils sont éloignés de quantités données, savoir : $AC = 130$ kilomètres et $BC = 100$ kilomètres. A quelle distance du point C leur rencontre aura-t-elle lieu ?

x' A B R C R' x

Fig. 45.

Cette rencontre aura lieu à droite ou à gauche du point C. Supposons qu'elle ait lieu à gauche ; soient R le point de rencontre et x la distance CR. Le premier courrier, pour aller du point A au point de rencontre, doit parcourir :

$$(130 - x) \text{ km},$$

le second : $(100 - x)$ km.

Les temps égaux employés à parcourir ces distances sont :

$$\frac{130 - x}{10} \quad \text{et} \quad \frac{100 - x}{8};$$

d'où l'équation :

$$\frac{130 - x}{10} = \frac{100 - x}{8}.$$

En résolvant, on trouve $x = -20$.

Cette valeur négative ne peut convenir, car x représente une distance. Les mobiles ne peuvent donc se rencontrer à gauche du point C ; mais en supposant que la rencontre ait lieu à droite de ce point et en appelant x la distance CR', l'équation du problème serait :

$$\frac{130 + x}{10} = \frac{100 + x}{8}.$$

Cette équation admet pour solution $x = 20$, c'est-à-dire la valeur absolue du résultat précédent.

Remarque. — Quand l'inconnue peut être comptée dans deux sens différents, il est préférable de lui attribuer une valeur algébrique et de la compter positivement dans un sens, négativement dans l'autre. En général, les équations établies en tenant compte de cette convention répondent à toutes les hypothèses compatibles avec l'énoncé. S'il en était autrement (*et il y aura lieu de s'en assurer*) il faudrait examiner chaque cas séparément.

Nous allons reprendre par cette méthode la question précédente.

X' A B M C X

Fig. 46.

Considérons la droite X'X comme un axe dirigé. Sur cet axe, prenons pour origine le point C et pour sens positif celui de X' vers X. Le point de rencontre des mobiles étant désigné par M, sa position sera déterminée par la mesure algébrique du vecteur $\overline{CM}$. Posons :

$$\overline{CM} = x.$$

Les temps employés par les mobiles pour parcourir les distances AM et BM sont égaux, on a donc :

$$\frac{\overline{AM}}{10} = \frac{\overline{BM}}{8}. \qquad (1)$$

Or, d'après le théorème de Chasles (n° 8) :

$$\overline{AM} = \overline{AC} + \overline{CM} = 130 + x, \qquad (2)$$

$$\overline{BM} = \overline{BC} + \overline{CM} = 100 + x. \qquad (3)$$

L'équation (1) devient alors :

$$\frac{130 + x}{10} = \frac{100 + x}{8};$$

d'où $x = 20$.

x étant positif, la rencontre a lieu à droite de C et à une distance égale à 20 kilomètres.

III. PROBLÈMES A DONNÉES LITTÉRALES. DISCUSSION.

130. *Problème I. — Partager le nombre 254 en deux parties telles que la somme des quotients obtenus en divisant l'une d'elles par 4, l'autre par 3, soit égale à un nombre donné* a.

Soient x et $254 - x$ les deux parties demandées.

L'équation du problème est :

$$\frac{x}{4} + \frac{254 - x}{3} = a;$$

d'où

$$3x + 1\,016 - 4x = 12a, \qquad (1)$$

et

$$x = 1\,016 - 12a. \qquad (2)$$

Discussion. — Pour convenir au problème, le nombre x doit être positif et plus petit que 254.

Il faut donc qu'on ait :

$$0 < 1\,016 - 12a < 254;$$

c'est-à-dire

$$\frac{762}{12} < a < \frac{1\,016}{12}, \quad \text{ou} \quad \frac{127}{2} < a < \frac{254}{3}.$$

En particulier si

$$a = \frac{254}{3}, \quad x = 0, \quad \text{et si} \quad a = \frac{127}{2}, \quad x = 254.$$

Problème II. — Sur la droite indéfinie X'X qui passe par deux points donnés A et B, trouver un point M tel que le rapport $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ soit égal à un nombre donné k.

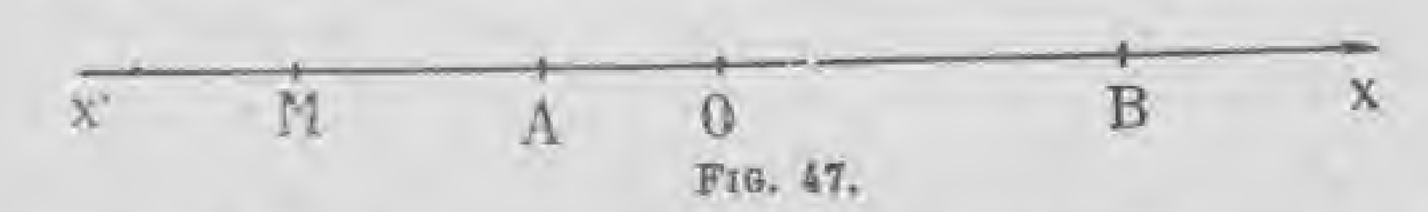


Fig. 47.

Sur cette droite, prenons pour origine un point quelconque O et pour sens positif celui de X' vers X. Désignons les abscisses des points A, B, M,

par a, b, x. La position du point M sera déterminée par la valeur de x.

La grandeur algébrique d'un vecteur est égale à l'abscisse de l'extrémité diminuée de l'abscisse de l'origine. On a donc :

$$\overline{MA} = \overline{OA} - \overline{OM} = a - x,$$
$$\overline{MB} = \overline{OB} - \overline{OM} = b - x.$$

On doit avoir : $$\frac{a - x}{b - x} = k\,; \qquad (1)$$

d'où $$x(k - 1) = kb - a. \qquad (2)$$

Discussion. — Pour que valeur de x convienne, il suffit qu'elle soit finie.

1° Si $k - 1$ est différent de zéro, c'est-à-dire si $k \neq 1$, l'équation (2) donne : $$x = \frac{kb - a}{k - 1}.$$

Il existe donc un point et un seul répondant à la question.

2° Si $k - 1 = 0$, c'est-à-dire si $k = 1$, l'équation (2) devient :

$$x \times 0 = b - a.$$

Comme a est différent de b, cette équation et, le problème n'admettent aucune solution.

Problème III. — On donne un triangle ABC de base BC = b *et de hauteur AD =* h. *Par un point I de AD, on mène la parallèle HG à la base BC ; puis on abaisse les perpendiculaires HE et GF sur BC. Déterminer la base et la hauteur du rectangle ainsi formé, de façon qu'il ait un périmètre donné,* 2p. *Discuter.*

Soient x et y la base et la hauteur du rectangle EFGH. Les triangles semblables ABC et AHG donnent :

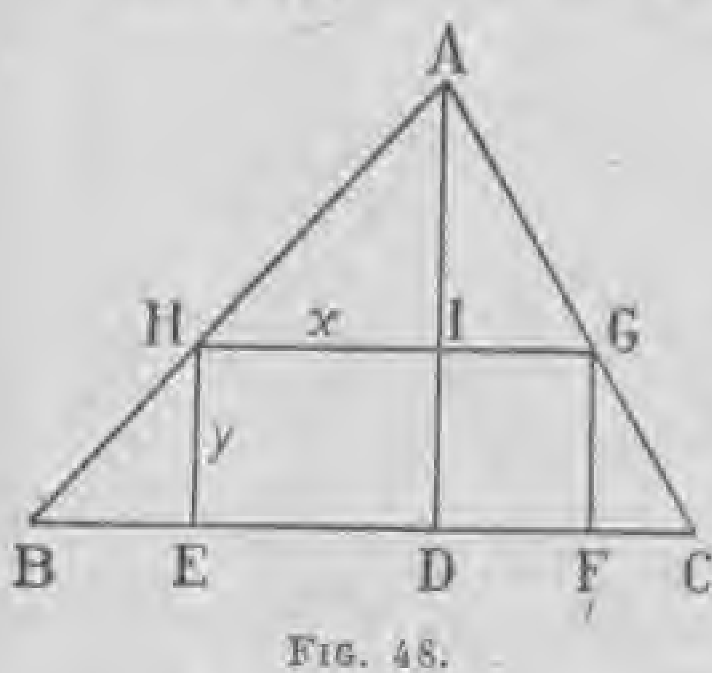


Fig. 48.

$$\frac{h}{h - y} = \frac{b}{x}. \qquad (1)$$

On a aussi : $x + y = p$. (2)

En remplaçant, dans (1), x par sa valeur tirée de l'équation (2), il vient :

$$y(b - h) = h(b - p)\,; \qquad (3)$$

et, en supposant $b - h \neq 0$,

$$y = \frac{h(b - p)}{b - h}, \qquad (4)$$

et par suite

$$x = \frac{b(p - h)}{b - h}.$$

Discussion. — Pour que la valeur de y convienne, il faut : 1° qu'elle soit positive et plus petite que h ; 2° qu'elle rende positive la valeur de x.

Il faut donc : 1° $$0 < \frac{h(b - p)}{b - h} < h. \qquad (5)$$

2° $$\frac{b(p - h)}{b - h} > 0. \qquad (6)$$

α) *Supposons :* $$b - h > 0.$$

En multipliant les inéquations (5) par $b - h$, nous obtenons :

$$0 < h(b - p) < h(b - h),$$

et, en divisant par h : $0 < b - p < b - h$.

Cette relation équivaut aux deux inéquations :

$$0 < b - p \quad \text{et} \quad b - p < b - h,$$

qui donnent respectivement :

$$p < b \quad \text{et} \quad p > h.$$

Les inéquations (5) sont donc satisfaites pour $h < p < b$.

L'inéquation (6) est également vérifiée pour ces valeurs de p. Ainsi le problème admet une solution si

$$h < p < b. \qquad (7)$$

β) *Supposons :* $$b - h < 0.$$

En procédant de la même manière on trouve :

$$b < p < h. \qquad (8)$$

Les relations (7) et (8) montrent que le demi-périmètre du rectangle doit toujours être compris entre la base et la hauteur du triangle.

Cas particuliers. — Avant de résoudre l'inéquation (3), nous avons supposé : $b - h \neq 0$ ou $b \neq h$. Si $b = h$, cette équation devient :

$$y \times 0 = h(b - p). \qquad (9)$$

Si $p \neq b$ et par conséquent $p \neq h$, le problème est impossible, ce qu'il est aisé de vérifier sur une figure.

Si $p = b = h$, l'équation (9) est vérifiée pour une valeur quelconque de y et le problème est indéterminé. En effet, *dans un triangle dont la hauteur est égale à la base, le demi-périmètre d'un rectangle tel que* EFGH *est égal à la base.*

131. RÉSOLUTION DE PROBLÈMES PAR LES GRAPHIQUES.

— *Problème.* — *Un cycliste part à* 5 *heures de Paris vers Orléans. Il parcourt* 16 *kilomètres à l'heure et fait une halte d'une demi-heure après chaque heure de marche. On demande :* 1° *A quelle heure il se trouvera à* 48 *kilomètres de Paris ;* 2° *A quelle heure et à quelle distance de Paris il sera dépassé par une automobile partie à* 7 h 30, *et faisant le même trajet à raison de* 40 *kilomètres à l'heure.*

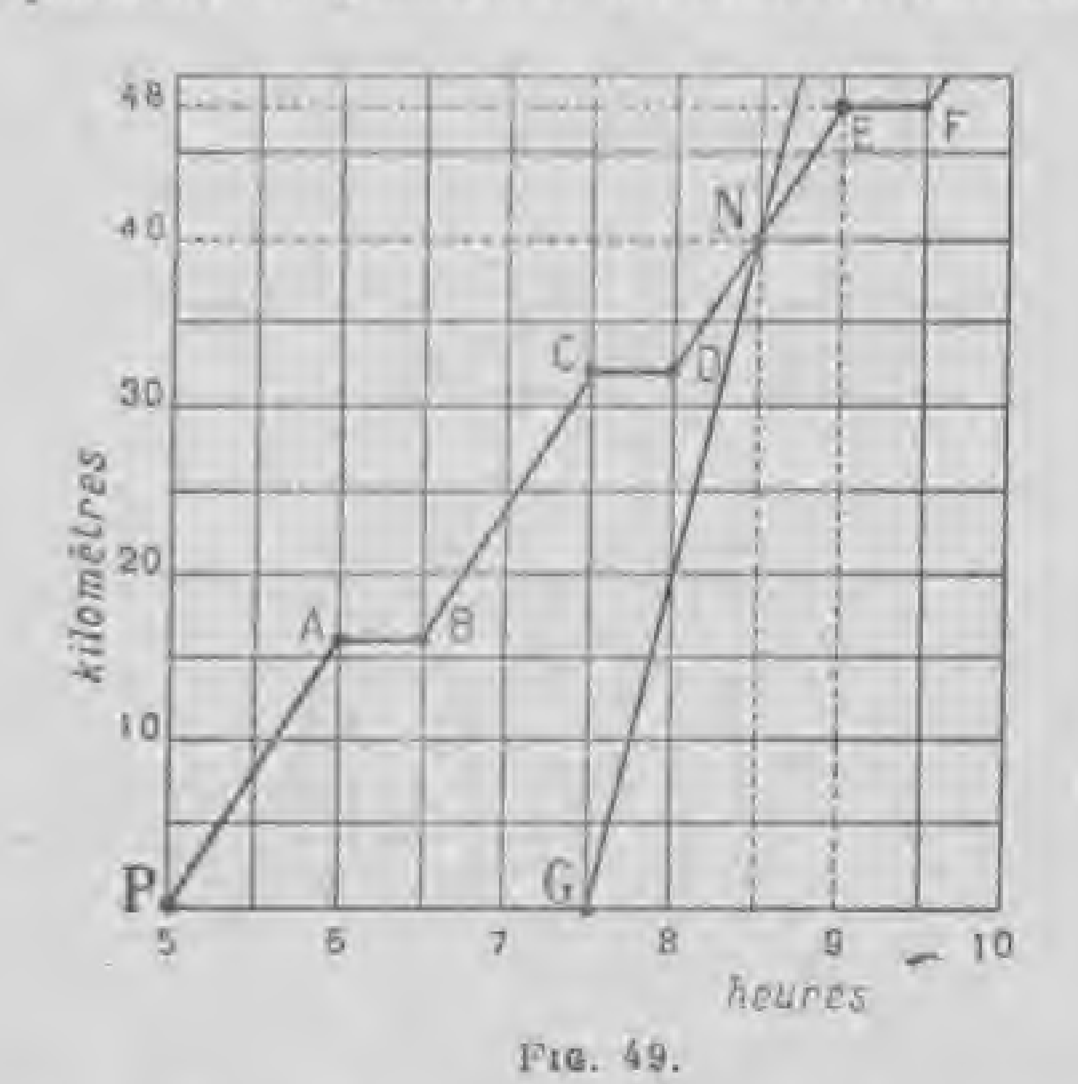


Fig. 49.

Portons les temps en abscisses et les espaces en ordonnées.

Le trajet du *cycliste* de 5 h à 6 h est représenté par PA ; de 6 h 30 à 7 h 30 par BC ; de 8 h à 9 h par DE.

Les horizontales AB, CD, EF correspondent aux arrêts. Le graphique de sa marche est donc une ligne brisée.

1° Une distance de 48 kilomètres correspond au segment EF du graphique et par suite *le cycliste se trouvera à 48 kilomètres de Paris de 9 h à 9 h 30.*

2° Le diagramme de la marche de l'*automobile* est la droite GN. Cette droite coupe la ligne brisée au point N qui correspond à 8 h 30 sur l'axe des heures et à 40 kilomètres sur l'axe des distances.

Le cycliste sera dépassé à 8 h 30 et à 40 kilomètres de Paris.

132. GRAPHIQUE DES CHEMINS DE FER. — Les graphiques des chemins de fer sont des tableaux où figurent les **diagrammes** du mouvement de tous les trains qui circulent sur une ligne pendant 24 heures.

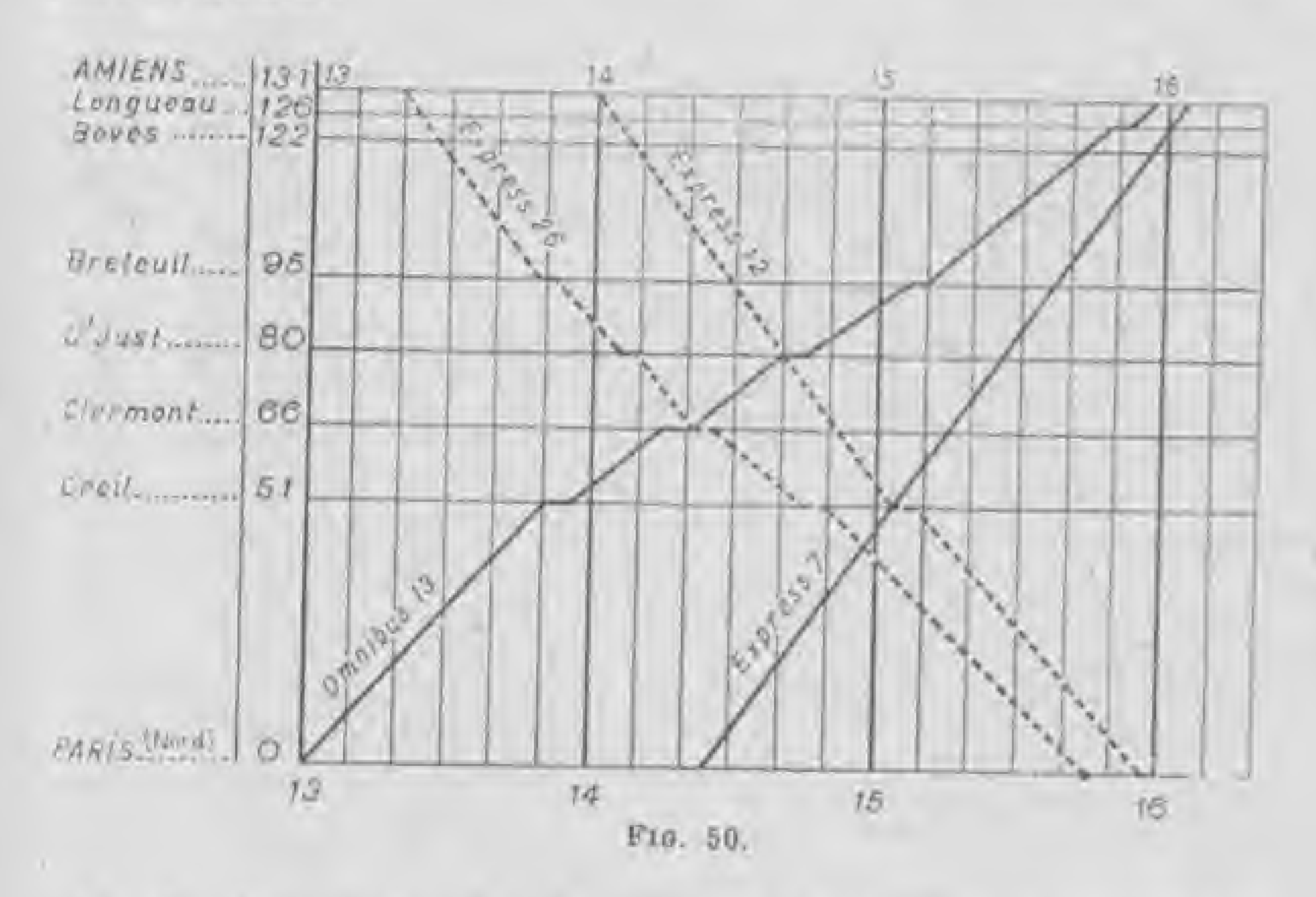


Fig. 50.

Pour les dresser on porte les temps en abscisses et les espaces (distances entre les stations) en ordonnées. L'origine des espaces est la station tête de ligne et l'origine des temps, minuit.

Entre deux arrêts la marche des trains est supposée uniforme ; les arrêts dans les gares sont figurés par une parallèle à l'axe des temps, dont la longueur mesure la durée du stationnement.

La figure 50 représente un graphique très réduit de la ligne Paris-Amiens. Il s'étend de 13 h à 16 h 20 et représente les diagrammes de quatre trains :

Deux partent de Paris : l'omnibus 13 et l'express 7 ; les deux autres, l'express 27 et l'express 12, partent d'Amiens.

L'omnibus 13 part de Paris à 13 h 5 et arrive à Amiens à 15 h 57 après des arrêts de 1 à 5 minutes dans chacune des stations.

L'express 7 part de Paris à 14 h 25 et arrive à Amiens sans arrêt à 16 h 5.

L'express 26 part d'Amiens à 13 h 20 et arrive à Paris à 15 h 45 après des arrêts de 2 à 5 minutes à Breteuil, Saint-Just, Clermont et Creil.

L'express 12 part d'Amiens à 14 h et arrive à Paris à 15 h 55 après un arrêt de 3 minutes à Creil.

Remarques. — 1° Plus un train est rapide plus son diagramme se rapproche de la verticale.

2° Les trains partant de Paris sont les trains **montants** ; ils portent des numéros impairs. Les trains allant sur Paris sont les trains **descendants** ; ils portent des numéros pairs.

3° Deux trains de **sens contraires** sur une ligne à **double voie** peuvent se rencontrer à n'importe quel endroit, puisqu'ils sont sur des voies différentes.

S'ils vont dans le **même sens**, ou bien si la ligne est à **voie unique**, ils ne peuvent se rencontrer que dans les gares.

En tenant compte de cette dernière remarque, l'organisation d'un train supplémentaire au moyen des graphiques peut se faire en quelques minutes et sans calcul.

PROBLÈMES SUR LE PREMIER DEGRÉ

Problèmes à une inconnue

586. Deux cyclistes A et B tournent autour d'un cercle de 1 500 mètres : A fait 15 tours à l'heure, B en fait 20. Étant partis au même instant, on demande le chemin parcouru par A lorsque B l'attrapera, sachant que A a un demi-tour d'avance ?

587. Un colonel veut ranger son régiment en carré. Il essaye de deux manières : la première fois, il lui reste 40 hommes ; la seconde fois, il essaye de mettre un homme de plus par côté, et il lui manque alors 31 hommes. De combien d'hommes se compose le régiment ?

588. Partager le nombre 46 en deux parties telles que $\frac{1}{7}$ de l'une plus $\frac{1}{3}$ de l'autre fasse 10. Généraliser la question.

589. Cinq personnes se sont partagé 859.100 f ; trouver la part de chacune sachant que la deuxième a reçu les $\frac{3}{4}$ de ce qu'a reçu la première, la troisième, les $\frac{3}{4}$ de ce qu'a reçu la seconde, et ainsi de suite.

590. Deux propriétés ont coûté 3 300 000 f ; trouver la valeur de chacune, sachant que le $\frac{1}{3}$ et le $\frac{1}{4}$ du prix de la première égalent les $\frac{7}{10}$ du prix de la deuxième.

591. Trouver deux nombres consécutifs tels que leur somme soit égale aux $\frac{2}{3}$ du premier, augmentés des $\frac{117}{88}$ du second.

592. Quelle est la date du mois de mars pour laquelle la fraction écoulée du mois est la même que la fraction écoulée de l'année : 1° pour une année ordinaire ; 2° pour une année bissextile ?

593. On a 360 grammes d'argent au titre de 0,820 ; combien faut-il y ajouter de grammes d'un second lingot au titre de 0,500 pour que l'alliage descende au titre de 0,700 ?

594. Un tonneau contient 120 litres de vin et 180 litres d'eau ; un second tonneau contient 90 litres de vin et 30 litres d'eau ; combien de litres faut-il prendre de chacun des tonneaux pour composer un mélange qui contienne 70 litres de vin et 70 litres d'eau ?

595. Deux trains partent en même temps, l'un de Paris, l'autre de Dijon, en se dirigeant sur Marseille ; le premier fait 60 kilomètres à l'heure, le deuxième en fait 35 ; à quelle distance de Dijon le premier train dépassera-t-il le second, sachant que Dijon est à 315 kilomètres de Paris ?

596. Un renard poursuivi par un lévrier a 50 sauts d'avance ; il en fait 4 pendant que le lévrier en fait 3 ; mais 2 sauts du lévrier en valent 3 du renard ; combien de sauts devra faire le lévrier pour atteindre le renard ?

597. Une horloge marque midi : à quelle heure l'aiguille des minutes rencontrera-t-elle celle des heures ? A quel instant se fait la rencontre comprise entre 2 heures et 3 heures ?

598. Une montre a trois aiguilles ; elle marque midi. On demande à quelle heure l'aiguille des secondes rencontrera celle des heures ; 2° l'aiguille des secondes rencontrera celle des minutes ; 3° l'aiguille des secondes sera bissectrice de l'angle formé par les deux autres.

599. Une personne dépense les $\frac{2}{3}$ de ce qu'elle a moins 40 francs, puis le $\frac{1}{4}$ du reste plus 30 francs ; puis les $\frac{2}{3}$ du nouveau reste plus 12 f. Elle a encore 240 francs. Quelle somme avait-elle ?

600. Un marchand à la fin d'une première année de commerce, trouve qu'il aurait doublé son capital s'il avait gagné 150 000 f de plus ; il lui arrive la même chose à la fin de la deuxième et de la troisième année ; il possède alors un capital qui est les $\frac{11}{4}$ du capital primitif. Quels sont les bénéfices de chaque année ?

601. Un marchand vend la moitié de ses oranges plus la moitié d'une orange ; une seconde fois, il vend la moitié du reste plus $\frac{1}{2}$ orange, et ainsi de suite ; après trois ventes, il ne lui reste rien. Combien avait-il d'oranges ?

602. Pour un achat j'ai dépensé $\frac{1}{5}$ de ce que j'avais plus 60 francs pour un deuxième achat, j'ai dépensé les $\frac{2}{5}$ du reste moins 40 francs ; pour un troisième, les $\frac{3}{7}$ du reste moins 20 francs ; pour un quatrième, les $\frac{4}{9}$ du reste plus 100 francs. Il me reste encore $\frac{1}{8}$ de ce que j'avais. Combien avais-je ?

603. Un élève distribue des noix à quelques-uns de ses condisciples : au premier il donne 5 noix plus le $\frac{1}{5}$ du reste, au deuxième il donne 10 noix plus le $\frac{1}{5}$ du reste, au troisième il donne 15 noix plus le $\frac{1}{5}$ du reste, et ainsi de suite. On demande combien il a distribué de noix, à combien d'élèves, et le nombre de noix que chacun a reçu, sachant que les parts ont été égales.

604. On donne un carré dont le côté AB a 74 mètres. On prend sur AB prolongé une longueur BC = 13 mètres, et l'on demande de mener par le point C une droite qui partage le carré en deux quadrilatères équivalents.

605. Les trois côtés d'un triangle sont AB = 12 mètres, BC = 14 mètres, AC = 18 mètres ; déterminer sur CB à partir de C un point tel que les parallèles menées de ce point aux deux autres côtés soient égales.

606. A quelle distance du centre d'un cercle de 45 centimètres de rayon faut-il prendre un point pour que la partie extérieure de la sécante partant de ce point, et passant par le centre, ne soit que la moitié de la tangente au cercle partant de ce même point ?

607. De combien faut-il augmenter les deux termes de la fraction $\frac{7}{9}$ pour qu'elle égale $\frac{5}{7}$? Interpréter le résultant obtenu.

608. Un batelier allant dans le sens du courant fait n kilomètres en t heures ; s'il remonte le courant, il met t' heures pour faire le même trajet Quelle est la vitesse du courant ?

609. On donne un nombre a ; partager ce nombre en deux parties telles que la somme des quotients obtenus en divisant l'une des parties par m, l'autre par n, soit égale à un nombre donné b. Les quatre nombres a, b, m et n sont positifs.

Problèmes à plusieurs inconnues

610. Un lingot composé d'or et d'argent pèse 1 320 grammes ; quel est le poids de chacun des deux métaux, sachant que le prix de l'argent contenu dans le lingot est le même que celui de l'or ? On sait qu'à poids égal l'or vaut 15 fois $\frac{1}{2}$ plus que l'argent.

611. On a deux lingots de même poids et de titres différents ; si l'on fond le premier lingot avec le $\frac{1}{4}$ du second, on obtient un alliage au titre de 0,936, et si l'on fond le premier lingot avec la moitié du second, on obtient un alliage au titre de 0,920. On demande le titre de chaque lingot.

612. Déterminer le volume de deux liquides dont la densité pour l'un est 1,3 et pour l'autre 0,7, sachant que si on les mélange, le volume égale 3 litres et la densité 0,9.

613. L'échantillon d'un vin pesait $\frac{1}{50}$ de moins que l'eau ; j'en ai reçu 500 litres dans un fût qui, vide, pesait 32 kilogrammes, et qui, rempli du vin envoyé, pèse 523 kilogrammes. On demande si on y a mêlé de l'eau, et dans quelle proportion.

614. Un enfant dit à son camarade : Donne-moi 5 de tes billes, et nous en aurons autant l'un que l'autre ; celui-ci répond : Donne-m'en 10 des tiennes, et j'en aurai deux fois plus qu'il ne t'en restera. Combien chacun avait-il de billes ?

615. Il y a 18 ans, l'âge d'une personne était le double de celui d'une autre personne ; dans 9 ans, l'âge de la première ne sera plus que les $\frac{5}{4}$ de celui de la seconde. Quel est leur âge actuel ?

616. Pierre dit à Simon. J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez, et quand vous aurez l'âge que j'ai, la somme des deux âges égalera 63 ans. Quels sont leurs âges ?

617. Un nombre est formé de deux chiffres dont la somme des valeurs absolues est 9. Quand on le renverse, on obtient un second nombre qui surpasse de 9 le quadruple du premier. Quel est ce nombre ?

618. Le chiffre des centaines d'un nombre de trois chiffres vaut les $\frac{3}{5}$ du chiffre des unités, et le chiffre des dizaines est la $\frac{1}{2}$ de la somme des deux autres. Trouver ce nombre, sachant qu'en lui ajoutant 198, on obtient le nombre renversé.

619. Newton naquit au XVII[e] siècle et mourut au XVIII[e]. On demande l'année de sa naissance et celle de sa mort, sachant que le nombre formé par les deux derniers chiffres de l'époque de sa naissance, augmenté de 12, est le double du nombre formé par les deux derniers chiffres de l'époque de sa mort, et ce dernier nombre de deux chiffres augmenté d'une unité est les $\frac{2}{3}$ du premier.

620. La date de l'invention de l'imprimerie par Gutenberg est exprimée par un nombre de quatre chiffres ; trouver ce nombre, sachant que la somme de ses chiffres est 14, le chiffre des dizaines est moitié de celui des unités, le chiffre des centaines est égal à la somme du chiffre des dizaines et de celui des mille : si on ajoute 4 905 à ce nombre, on obtient le nombre renversé.

621. Un bassin peut être rempli par les conduits A et B en 70 minutes, par les conduits A et C en 84 minutes, et par les conduits B et C en 140 minutes ; dans combien de temps le bassin peut-il être rempli par chacun des conduits coulant seul et par les trois conduits ensemble ?

622. On a trois lingots composés comme il suit :

le 1[er] de 20 g d'or,	de 30 g d'argent	et de 40 g de cuivre,	
le 2[e] de 30 g —	40 —	50 —	
le 3[e] de 40 —	50 —	90 —	

On demande quel poids il faudra prendre de chacun de ces lingots pour en former un autre qui contienne 34 grammes d'or, 46 grammes d'argent et 67 grammes de cuivre.

623. Hiéron de Syracuse fit faire une couronne d'or pesant 7 465 grammes. Pour connaître si l'orfèvre avait remplacé de l'or par de l'argent, Archimède plongea la couronne dans l'eau, où elle perdit 467 grammes de son poids. On sait que l'or perd dans l'eau $\frac{52}{1\,000}$ de son poids, et l'argent $\frac{95}{1\,000}$. Combien y avait-il d'or et d'argent dans la couronne ?

624. Un nombre de trois chiffres se termine à droite par un sept. Si on permute le chiffre des dizaines avec celui des unités, le nombre est augmenté de 54. Si on permute le chiffre des unités avec celui des centaines, le nombre est augmenté de 297. Quel est ce nombre ?

625. Dans un trapèze isocèle on connaît la grande base 18 mètres et la diagonale 15 mètres ; trouver la petite base, sachant que ce trapèze est inscrit dans un demi-cercle dont le rayon a 9 mètres.

626. Les dimensions d'un rectangle sont b et h ; on ajoute 5 mètres à la base b. Quel nombre faut-il ajouter à la hauteur pour que le nouveau rectangle ait une aire double de celle du premier ?

627. La base AB d'un rectangle ABCD a 48 mètres et sa hauteur AD 26 mètres ; de combien de mètres faut-il prolonger AB en F pour que le triangle extérieur FBH obtenu en joignant le point F au sommet D soit la différence des deux surfaces déterminées par la droite DF dans le rectangle donné ?

628. Les côtés d'un triangle ABC ont pour longueurs : AB = 18 mètres, AC = 27 mètres et BC = 36 mètres ; on mène à ce dernier côté les parallèles MM' = x' et NN' = y' qui déterminent sur AB des segments AM = 8 mètres, MN = 6 mètres. Calculer les trois segments AM' = x, M'N' = y, N'C = z, et les longueurs des deux parallèles.

629. Calculer les côtés d'un rectangle, sachant que si l'on augmente la largeur de 3 mètres et si l'on diminue d'autant la longueur, la surface ne change pas ; mais si, augmentant la longueur de 5 mètres, on diminue la longueur de 3 mètres, la surface augmente de 16 mètres carrés.

630. Trouver deux nombres tels que leur produit soit le triple de leur somme. Représenter graphiquement la variation de l'un de ces nombres en fonction de l'autre.

631. Trouver un nombre de deux chiffres, qui, ajouté au nombre renversé, donne pour somme 77. Représenter graphiquement la variation de l'un des nombres en fonction de l'autre.

632. Deux points A et B sont distants l'un de l'autre de d kilomètres. La tonne de charbon prise en A coûte a francs ; la tonne de charbon prise en B coûte b francs. Le transport de la tonne coûte c francs par kilomètre. Trouver entre A et B le point où la tonne de charbon coûte le même prix, qu'elle vienne de A ou de B, et vérifier que ces prix sont égaux.

Application $d = 800$ km,
$a = 4\,500$ f $b = 5\,100$ f
$c = 1{,}5$

633. Deux robinets coulent ensemble ; le premier remplirait le bassin en t heures, le second le viderait en t' heures. On les ouvre tous les deux ensemble. Au bout de combien de temps le bassin sera-t-il rempli s'il contient déjà de l'eau sur $\frac{1}{m}$ de la hauteur ?

634. On donne la base b et la hauteur h d'un triangle : calculer les côtés des carrés inscrits à ce triangle ayant un côté appliqué successivement sur chacun des côtés du triangle pris pour base. Démontrer que le plus grand carré repose sur le plus petit côté.

635. Dans un triangle ABC, on prend un point M sur la base BC, et de ce point on mène des parallèles ME, MF aux deux autres côtés. A quelle distance du point B faut-il placer le point M pour que la somme ME + MF égale une longueur donnée l ?

636. Dans un triangle dont les côtés sont a, b et c, mener une parallèle à la base b, telle que le trapèze formé ait un périmètre $2l$. — Discussion.

Problèmes à résoudre graphiquement

637. Représenter graphiquement les variations de l'allongement d'une barre de fer de 1 mètre lorsqu'on fait varier sa température de 0° à 150°. L'allongement de cette barre est donné par la formule

$$l = 0{,}012t.$$

dans laquelle l représente l'allongement exprimé en millimètres et t la température en degrés centigrades. (Faire correspondre 1 centimètre à 20° sur l'axe des x et 1 centimètre à 1 millimètre d'allongement sur l'axe y.)

638. Sachant qu'un navire qui file 20 nœuds parcourt approximativement 37 kilomètres à l'heure, construire un graphique qui permette d'exprimer un nombre de nœuds en kilomètres ou un nombre de kilomètres en nœuds.

639. Les points 0 et 100 du thermomètre centigrade correspondent aux points 32 et 212 du thermomètre Fahrenheit. Construire un graphique permettant de convertir à vue les degrés centigrades en degrés Fahrenheit et réciproquement.

640. Un cycliste part à 6 h de X pour Y en faisant 15 kilomètres à l'heure. A 8 h 12 une automobile part de Y pour X, par la même route et à une vitesse de 70 kilomètres à l'heure. Sachant que la distance XY égale 90 kilomètres, trouver graphiquement : 1° à quelle heure et à quelle distance de X a lieu la rencontre ? 2° quelle distance sépare le cycliste de l'automobile à 8 h 36 ?

641. Deux cyclistes Pierre et Jean partent le premier de M à 8 h et le second de N à 9 h 48 et vont l'un vers l'autre. Pierre croise Jean à 11 h et arrive à N à 13 h. Sachant que la distance MN égale 60 kilomètres, trouver : 1° l'heure où Jean arrive à M ; 2° la vitesse de chaque cycliste. (Solution graphique.)

642. A 7 h un voyageur part de M en automobile et parcourt 45 kilomètres à raison de 60 kilomètres à l'heure. Un accident l'oblige alors à s'arrêter. Au bout de 1h 10, il repart pour M à bicyclette en faisant 15 kilomètres à l'heure. Trouver graphiquement : 1° à quelle heure il sera de retour ; 2° à quelle heure et à quelle distance de M il rencontrera un cycliste parti de M à 8 h 20 et qui parcourt le même trajet à raison de 12 kilomètres à l'heure.

643. Une voiture part d'un certain endroit avec une vitesse de 12 kilomètres à l'heure. Une heure 45 minutes après, un piéton et un cycliste partent du même endroit et dans la même direction en marchant respectivement à des vitesses de 6 kilomètres et 18 kilomètres à l'heure. Dès que le cycliste rejoint la voiture, il rebrousse chemin et se porte à la rencontre du piéton. On demande à quelle distance du point de départ commun se fera la rencontre. (Solution graphique.)

644. Deux promeneurs prennent à 8 h 15 un bateau qui descend la Seine à une vitesse de 12 kilomètres à l'heure. Trouver au moyen d'un graphique à quelle heure et à quelle distance du point de départ ils doivent quitter le bateau, sachant qu'ils veulent revenir à pied le long du fleuve en faisant 3 kilomètres à l'heure et qu'ils doivent être de retour à midi.

645. Un cycliste part de A pour faire un trajet de 46 kilomètres à une allure de 15 kilomètres à l'heure. Au bout de quelque temps, il réduit sa vitesse à 12 kilomètres et arrive ainsi à destination 3 h 30 après son départ. Trouver graphiquement : 1° A quelle heure et à quelle distance de A il a changé de vitesse ; 2° A quelle heure il serait arrivé si, au lieu de réduire sa vitesse, il l'avait portée à 20 kilomètres.

646. Une voie ferrée présente entre deux points A et B un point culminant S, une rampe de A en S et une rampe de B en S. Les trains se dirigeant de A vers B ont une vitesse de 30 kilomètres de A en S et de 60 kilomètres de S en B. Les trains se dirigeant de B vers A ont une vitesse de 15 kilomètres de B à S et de 45 kilomètres de S à A.

1° Calculer les distances AS et SB, sachant que la première vaut 3 fois la seconde et que le trajet total AB s'effectue en 1 h 45.

2° Calculer la durée du trajet BA. (Construction graphique.)

647. Une ligne de tramways AB, d'une longueur de 8 kilomètres, est parcourue dans les deux sens par des voitures qui partent toutes les 10 minutes et qui font 12 kilomètres à l'heure, arrêts compris. Le premier départ a lieu simultanément en A et en B, à 6 h du matin.

Un piéton part de A à 8 h 1/4 du matin pour se rendre en B ; sa vitesse est de 4 kilomètres à l'heure. On demande : 1° Combien il a rencontré de voitures venant de B ; 2° combien de voitures venant de A l'ont dépassé. (Solution graphique.)

648. 6 voyageurs ont à effectuer un trajet de 60 km. Ils ne disposent que d'une voiture à 3 places en dehors de celle du chauffeur. Ils décident que trois d'entre eux partiront à pied, tandis que les trois autres partiront en voiture et qu'arrivés à une certaine distance, l'automobile laissera les voyageurs pour revenir chercher les piétons, tandis que les premiers achèveront le trajet à pied. Tracer les diagrammes des mouvements des deux groupes ainsi que celui de la voiture si l'on suppose que les deux groupes arrivent en même temps à destination. A quelle distance du point de départ s'effectuent, les deux arrêts de la voiture. Vitesse de la voiture : 45 km/h ; vitesse des piétons : 5 km/h.

649. Entre deux villes A et B distantes de 60 km circule une ligne d'autobus avec départ dans les deux sens toutes les vingt minutes. La vitesse moyenne de A vers B est de 40 km/h ; celle de B vers A, de 50 km/h. Tracer les diagrammes des mouvements des voitures entre 12 heures et 14 heures ; combien d'autobus, la voiture partie de A à 13 heures croisera-t-elle ? Un voyageur désire partir de A s'arrêter en C à 30 km de A y rester une heure et revenir en A avant 5 heures ; à quelle heure doit-il partir pour prendre le moins de temps possible ?

CHAPITRE VIII

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

I. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ A UNE INCONNUE.

133. DÉFINITIONS. — ***L'équation du second degré à une inconnue se présente sous la forme générale***

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

où a, b, c sont des **coefficients** (numériques ou littéraux) de valeurs connues, et où x est **l'inconnue**.

Les valeurs qui, substituées à x, vérifient l'équation sont dites **les racines** de l'équation.

Si aucun des coefficients a, b, c n'est nul, l'équation est dite une **équation complète**.

Dans le cas contraire, on a une équation **incomplète**.

Exemple : **Équations complètes.**

$$5x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0.$$

Équations imcomplètes.

$$2x^2 - 6x = 0\ ; \quad x^2 - \frac{9}{25} = 0$$
$$(m^2 - 1)x^2 - 4n = 0.$$

Pour résoudre une équation du second degré, on cherche à la ramener aux équations du premier degré, en la mettant sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.

On sait, en effet, que pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul.

D'une façon générale, l'expression pourra se décomposer en deux facteurs du premier degré. En égalant successivement chacun des facteurs à zéro, on obtiendra deux valeurs de x susceptibles d'annuler le produit.

L'équation du second degré aura donc, en général, deux racines.

Si les deux valeurs de x obtenues sont différentes, **les deux racines sont distinctes.**

Si elles sont égales, l'équation a ses racines égales ou encore elle admet **une racine double.**

Si la décomposition en facteurs est impossible, l'équation n'a **pas de racines.**

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION INCOMPLÈTE DU SECOND DEGRÉ.

134. 1) $c = 0$. **ÉQUATION DE LA FORME $ax^2 + bx = 0$.**

On peut mettre x en facteur :

$$x(ax + b) = 0.$$

En annulant successivement ces deux facteurs, on a les équations du premier degré : $x = 0$

$$ax + b = 0$$

qui donnent pour x les valeurs :

$$x = 0 \quad et \quad x = -\frac{b}{a}.$$

Exemples *a)* : $3x^2 - 5x = 0$

qui donne : $x(3x - 5) = 0$

et : $x = 0, \quad x = 5/3$

b) $(m^2 - 1)x^2 - x(m^2 + 1) = 0$

$$x[(m^2 - 1)x - (m^2 + 1)] = 0$$

et : $x = 0, \quad x = \dfrac{m^2 + 1}{m^2 - 1}, \qquad (\text{si } m \neq \pm 1).$

135. 2) $b = 0$. **ÉQUATION DE LA FORME $ax^2 + c = 0$.**

Cherchons à ramener l'expression à une différence de deux carrés. Si l'on met a en facteurs, on a :

$$a\left(x^2 + \frac{c}{a}\right) = 0.$$

Si $\frac{c}{a}$ est > 0, l'expression ne sera jamais nulle, la somme de deux quantités positives ne pouvant jamais être nulle.

Si $\frac{c}{a} < 0$, on peut considérer $-\frac{c}{a}$ comme le carré de $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ et écrire :

$$a\left[x^2 - \left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2\right] = 0$$

qui, d'après l'identité $x^2 - m^2 = (x - m)(x + m)$ peut s'écrire :

$$a\left(x - \sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\left(x + \sqrt{-\frac{c}{a}}\right) = 0.$$

En annulant successivement chacun de ces deux facteurs, on aura les racines :

$$x' = \sqrt{-\frac{c}{a}} \qquad x'' = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Exemples *a)* : $4x^2 - 9 = 0$

donne : $4\left(x^2 - \frac{9}{4}\right) = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0$

d'où les racines : $x' = 3/2$ et $x'' = -3/2$.

b) $(m+1)^2x^2 - 4m^2 = 0$

donne :

$$(m+1)^2\left[x^2 - \frac{4m^2}{(m+1)^2}\right] = (m+1)^2\left(x - \frac{2m}{m+1}\right)\left(x + \frac{2m}{m+1}\right)$$

et $x'' = \dfrac{2m}{m+1}$ et $x' = -\dfrac{2m}{m+1}$, (si $m \neq -1$).

136. 3) $b = c = 0$. **ÉQUATION DE LA FORME $ax^2 = 0$.**

Elle peut s'écrire : $a.x.x = 0$;

en annulant les facteurs inconnus, on obtient pour x, les deux valeurs égales $x = 0$.

L'équation admet la racine double $x = 0$.

Remarques. — Il n'y a pas lieu d'envisager ici le cas où $a = 0$. L'équation se réduit alors à une équation du premier degré

$$bx + c = 0 ;$$

et n'admet que la seule racine :

$$x = -\frac{c}{b}.$$

Mais, dans le cas où les coefficients dépendent d'un paramètre, il peut arriver que le coefficient de x^2 s'annule pour une valeur particulière de ce paramètre. Nous verrons plus loin ce que deviennent alors les deux racines de l'équation.

137. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION COMPLÈTE DU SECOND DEGRÉ $ax^2 + bx + c = 0$. ($abc \neq 0$).

On cherche à décomposer le premier membre en facteurs du premier degré, en le mettant sous la forme d'une différence de deux carrés.

Puisque $a \neq 0$, l'équation peut s'écrire :

$$a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) = 0.$$

Considérons les deux premiers termes de la parenthèse comme le commencement du carré d'un binôme.

x^2 est le carré du premier terme x,

$\dfrac{bx}{a}$ est le double produit du premier terme x et du second qui est donc égal à $\dfrac{b}{2a}$.

Si l'on ajoute $\dfrac{b^2}{4a^2}$, carré du deuxième terme, et si on le retranche, on aura : $a\left[x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{b^2}{4a^2} + \dfrac{c}{a}\right] = 0$

et, en groupant :

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0.$$

Distinguons 3 cas :

a) **Si $b^2 - 4ac > 0$,** $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ est aussi positif et peut être considéré comme le carré de $\sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

On a donc la différence de carrés cherchée :

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right]$$

$$= a\left[x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]\left[x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] = 0.$$

En annulant successivement les deux parenthèses on aura les équations du premier degré :

$$x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

et

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0,$$

ce qui donne les racines :

$$\boldsymbol{x' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad \textit{et} \quad \boldsymbol{x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},$$

que l'on groupe souvent sous la forme unique :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

b) **Si $b^2 - 4ac = 0$,** l'équation se réduit à :

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

et l'équation admet ***la racine double.***

$$\boldsymbol{x = -b/2a.}$$

c) **Si $b^2 - 4ac < 0$,** $4ac - b^2 > 0$, l'expression :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}$$

formée de deux termes dont l'un est positif ou nul et l'autre positif ne peut jamais être nulle.

L'équation n'a pas de racine.

138. Remarques. — 1° L'expression $b^2 - 4ac$ qui permet de distinguer si les racines de l'équation existent est appelée le **discriminant** de l'équation du second degré.

On la représente par la lettre grecque delta : Δ ou δ.

2° *Si le coefficient de* x *est un entier pair* $b = 2b'$, la formule de résolution se simplifie légèrement :

Elle peut s'écrire :

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

3° Si les coefficients a, b et c sont rationnels et si le discriminant n'est pas un carré parfait, les deux racines

$$x' = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ et } x'' = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

formées des mêmes termes $-\frac{b}{2a}$ et $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ mais séparées par des signes différents, sont conjuguées.

Réciproquement, on démontre que si l'équation du second degré admet pour racine une expression de la forme $\alpha + \sqrt{\beta}$ où β n'est pas carré parfait, elle admet aussi pour racine sa valeur conjuguée $\alpha - \sqrt{\beta}$.

4° *Si le coefficient* a *du terme carré tend vers zéro, on voit que :*

$$\lim x' = \lim_{a=0} \left[\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] = \frac{-2b}{0} = \infty.$$

$$\lim x'' = \lim_{a=0} \left[\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] = \frac{-b + b}{0} = \frac{0}{0}, \text{ valeur indéterminée.}$$

Si on lève l'indétermination en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué du numérateur, on aura :

$$x'' = \left[\frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}\right]$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}$$

$$= \frac{4ac}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})} = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

d'où $$\lim_{a=0} x'' = \frac{2c}{-2b} = -\frac{c}{b}.$$

qui n'est autre que la racine de $bx + c = 0$.

Lorsque a tend vers zéro, l'une des racines tend vers l'infini et l'autre vers $-\frac{c}{b}$.

EXEMPLES : 1° Soit l'équation

$$3x^2 - 5x + 2 = 0.$$

On peut l'écrire : $$3\left(x^2 - \frac{5x}{3} + \frac{2}{3}\right) = 0.$$

$x^2 - \frac{5}{3}x$ peut être considéré comme le commencement du carré de $x - \frac{5}{6}$ ou $x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36}$.

On aura donc : $$3\left[x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} - \frac{25}{36} + \frac{2}{3}\right] = 0 ;$$

ou : $$3\left[\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25 - 24}{36}\right] = 3\left[\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2\right]$$

$$= 3\left[x - \frac{5}{6} - \frac{1}{6}\right]\left[x - \frac{5}{6} + \frac{1}{6}\right] = 3(x - 1)\left(x - \frac{2}{3}\right) = 0.$$

Les deux racines sont donc :

$$x' = \frac{2}{3} \text{ et } x'' = 1.$$

2° Résoudre : $$abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0.$$

On peut écrire : $$ab\left[x^2 - \frac{a^2 + b^2}{ab}x + 1\right] = 0$$

$x^2 - \frac{a^2 + b^2}{ab}x$ est le commencement du carré de $x - \frac{a^2 + b^2}{2ab}$ que l'on complétera par addition et soustraction de $\frac{(a^2 + b^2)^2}{4a^2b^2}$.

D'où : $$ab\left[\left(x - \frac{a^2 + b^2}{2ab}\right)^2 - \left(\frac{(a^2 + b^2)^2}{4a^2b^2} - 1\right)\right]$$

$$= ab\left[\left(x - \frac{a^2 + b^2}{2ab}\right)^2 - \left(\frac{a^2 - b^2}{2ab}\right)^2\right]$$

$$= ab\left[\left(x - \frac{a^2 + b^2}{2ab} - \frac{a^2 - b^2}{2ab}\right)\left(x - \frac{a^2 + b^2}{2ab} + \frac{a^2 - b^2}{2ab}\right)\right]$$

$$= ab\left[\left(x - \frac{a}{b}\right)\left(x - \frac{b}{a}\right)\right] = 0$$

d'où les deux racines : $x' = \frac{a}{b}$ et $x'' = \frac{b}{a}$.

140. APPLICATIONS. — 1° *Résoudre l'équation*

$$\frac{3}{2(x^2 - 1)} - \frac{1}{4(x + 1)} = \frac{1}{8}.$$

Multiplions tous les termes par $8(x^2 - 1)$, multiple commun des dénominateurs ; nous avons :

$$12 - 2(x - 1) = x^2 - 1 \quad \text{ou} \quad x^2 + 2x - 15 = 0.$$

La formule donne

$$x = -1 \pm \sqrt{16} = -1 \pm 4 ;$$

d'où $$x' = 3, \quad x'' = -5.$$

Ces racines conviennent, car elles n'annulent aucun dénominateur.

2° *Résoudre l'équation :*

$$m^2x^2 - (m + n)\,x - 1 = n^2x^2 + (m - n)\,x - 2,$$

dans laquelle m *est différent de* n.

En l'ordonnant, il vient : $(m^2 - n^2)x^2 - 2mx + 1 = 0$.
Le discriminant est : $m^2 - (m^2 - n^2)$ ou n^2.
Les racines, données par la formule, sont :

$$x' = \frac{m + \sqrt{n^2}}{m^2 - n^2} = \frac{m + n}{m^2 - n^2} = \frac{1}{m - n};$$

$$x'' = \frac{m - \sqrt{n^2}}{m^2 - n^2} = \frac{m - n}{m^2 - n^2} = \frac{1}{m + n}.$$

3° *Quelles valeurs faut-il donner à* m *pour que l'équation*

$$(m - 1)x^2 - 2(m - 2)x + m - 7 = 0$$

ait des racines ?

Pour que cette équation ait des racines, il faut et il suffit que le discriminant soit supérieur ou égal à zéro :

$$\Delta = (m - 2)^2 - (m - 1)\,(m - 7) = 4m - 3$$

$$4m - 3 \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad m \geqslant \frac{3}{4}.$$

Si $m > \frac{3}{4}$, les racines sont distinctes.

Si $m = \frac{3}{4}$, la racine est double et égale à $-\frac{b}{2a}$;

or $$-\frac{b}{2a} = \frac{m - 2}{m - 1} = \frac{\frac{3}{4} - 2}{\frac{3}{4} - 1} = \frac{3 - 8}{3 - 4} = 5.$$

4° *Déterminer* m *pour qu'une racine de l'équation :*

$$2x^2 + (2m - 1)\,x - m^2 = 0$$

soit égale à — 1.

Il faut que $x = -1$ annule le premier membre de l'équation, c'est-à-dire que l'on ait :

$$2 - 2m + 1 - m^2 = 0 \quad \text{ou} \quad m^2 + 2m - 3 = 0,$$

ce qui a lieu pour $m = -1 \pm \sqrt{1 + 3}$ ou $m = 1$ et $m = -3$.

PROPRIÉTÉS DES RACINES DE L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ.

141. DÉFINITION. — ***On appelle propriétés des racines de l'équation du second degré***

$$ax^2 + bx + c = 0$$

les relations qui existent entre les coefficients a, b, et c et les racines de cette équation quand elles existent.

Somme des racines.
Si $b^2 - 4ac \geqslant 0$, on a immédiatement :

$$x' + x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

$$\boldsymbol{x' + x'' = -\frac{b}{a}}.$$

Produit des racines.
Le produit sera de même :

$$x'x'' = \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$
$$= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2}$$

$$\frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

$$\boldsymbol{x'x'' = \frac{c}{a}}.$$

Différence des racines. $x'' - x' =$

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\boldsymbol{x'' - x' = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}}.$$

Somme des carrés et des cubes des racines.
Les formules classiques donnent :

$$x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$x'^3 + x''^3 = (x' + x'')^3 - 3x'x''(x' + x'') = -\frac{b^3}{a^3} - \frac{3c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)$$
$$= \frac{3abc - b^3}{a^3}.$$

Somme des puissances semblables des racines.

On peut établir une relation rationnelle qui permet de calculer la somme des n^e puissances des racines, connaissant les sommes des $(n - 1)^e$ et $(n - 2)^e$ puissances.

x' et x'' étant les racines de l'équation, annulent l'expression $ax^2 + bx + c$ quand on les substitue à x. D'où :

$$ax'^2 + bx' + c = 0$$
$$ax''^2 + bx'' + c = 0.$$

Multiplions la première par x'^{n-2} et la seconde par x''^{n-2} ; nous aurons

$$ax'^n + bx'^{n-1} + cx'^{n-2} = 0,$$
$$ax''^n + bx''^{n-1} + cx''^{n-2} = 0.$$

En additionnant terme à terme :

$$a(x'^n + x''^n) + b(x'^{n-1} + x''^{n-1}) + c(x'^{n-2} + x''^{n-2}) = 0$$

ou, en désignant $x'^n + x''^n$ par le symbole S_n, $x'^{n-1} + x''^{n-1}$ par S_{n-1}, $x'^{n-2} + x''^{n-2}$ par S_{n-2}, on a la relation rationnelle,

$$\boldsymbol{aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0.}$$

Calculons, par exemple, en partant de cette relation, la somme des cubes et des quatrièmes puissances des racines :

On peut écrire $\quad aS_3 + bS_2 + cS_1 = 0$

or, d'après ce qui précède,

$$S_1 = -\frac{b}{a} \text{ et } S_2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

d'où :

$$aS_3 + \frac{b(b^2 - 2ac)}{a^2} - \frac{bc}{a} = 0,$$

et

$$S_3 = \frac{3abc - b^3}{a^3}.$$

De même : $\quad aS_4 + bS_3 + cS_2 = 0$

et, en remplaçant :

$$aS_4 + \frac{b(3abc - b^3)}{a^3} + \frac{c(b^2 - 2ac)}{a^2} = 0$$

d'où :

$$S_4 = x'^4 + x''^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}.$$

On peut, ainsi de suite, calculer les sommes de n'importe quelle puissance des racines, et l'on obtiendra toujours des relations rationnelles en a, b et c.

De ces formules, on déduit immédiatement la somme des inverses des puissances égales des racines.

En effet, on peut écrire :

$$S'_n = \frac{1}{x'^n} + \frac{1}{x''^n} = \frac{x'^n + x''^n}{(x'x'')^n} = \frac{S_n a^n}{c^n}.$$

De même, toute relation symétrique entre les racines x' et x'' peut être exprimée rationnellement en fonction des coefficients.

Soit, par exemple, l'expression :

$$x'^3 + 5x'^2x'' + 5x'x''^2 + x''^3 = (x' + x'')^3 + 2x'x''(x' + x'')$$
$$= -\frac{b^3}{a^3} - \frac{2bc}{a^2} = -\frac{b^3 + 2abc}{a^3}.$$

Nous verrons une application importante de cette remarque dans la résolution des équations du second degré à plusieurs inconnues.

Remarque. — Si le coefficient a du terme en x^2 est égal à l'unité, les relations deviennent $x' + x'' = -b$ et $x'x'' = c$.

On peut toujours ramener à cette forme n'importe quelle équation en divisant tous ses termes par a ; en posant alors $\frac{b}{a} = p$ et $\frac{c}{a} = q$, ***l'équation prend la forme :***

$$\boldsymbol{x^2 + px + q = 0}$$

avec $\quad \boldsymbol{x' + x'' = -p}$ et $\boldsymbol{x'x'' = q}$.

Réciproquement, *si deux nombres* x' *et* x'' *satisfont à deux relations de la forme* x' + x'' = — p *et* x'x'' = q, *ce sont les racines d'une équation*

$$x^2 + px + q = 0.$$

Ces deux nombres sont alors les racines évidentes de l'équation

$$(x - x')(x - x'') = 0,$$

ou, en développant

$$x^2 - (x' + x'')x + x'x'' = 0$$

et en remplaçant $x' + x''$ et $x'x''$ par leurs valeurs

$$x^2 + px + q = 0.$$

APPLICATIONS

142. *a)* ***Former une équation du second degré de racines données.***

Soient m et n deux nombres ; on veut former une équation du second degré admettant ces nombres pour racines.

Il suffit de prendre pour coefficient de x, la somme de ces deux nombres changée de signe et pour terme indépendant leur produit.

L'équation sera $x^2 - (m + n)x + mn = 0$;

Exemple :

$$m = -2 \text{ et } n = \frac{2}{3} \quad \text{on aura} \quad x^2 + \left(2 - \frac{2}{3}\right)x - \frac{4}{3} = 0,$$

ou :

$$3x^2 + 4x - 4 = 0.$$

143. *b)* ***Trouver deux nombres, connaissant leur somme et leur produit.***

Soit à chercher deux nombres dont on connaît la somme S et le produit P.

D'après ce qui précède, ces deux nombres sont les racines de l'équation : $\quad x^2 - Sx + P = 0.$

Exemple : $\quad S = -\frac{7}{5} \quad$ et $\quad P = -\frac{6}{5}.$

L'équation sera $x^2 + \frac{7}{5}x + \left(-\frac{6}{5}\right) = 0$ ou $5x^2 + 7x - 6 = 0$,

dont les racines sont $x' = -2$ et $x'' = \frac{3}{5}$.

144. *c)* ***Déterminer les relations auxquelles doivent satisfaire les coefficients a, b, c pour que les racines de l'équation aient certaines propriétés.***

Exemple : Déterminer la valeur de b pour que l'une des racines de l'équation $\quad x^2 + bx + 12 = 0$

soit triple de l'autre.

Si x' et x'' sont les deux racines, on doit avoir $x'' = 3x'$; or, $x'x'' = 12$. On en tire immédiatement $3x'^2 = 12$

et :

$$x' = \pm 2.$$

Comme $b = -(x' + x'') = -4x' = \mp 8$, l'équation sera :

$$x^2 \mp 8x + 12 = 0.$$

Exemple. — Quelle relation doit-il exister entre les coefficients pour que, dans l'équation $x^2 + bx + c = 0$, on ait

$$x'^2 - 5x'x'' + x''^2 = 0.$$

L'expression proposée peut s'écrire :

$$(x' + x'')^2 - 7x'x'' = \frac{b^2}{a^2} - \frac{7c}{a} = 0$$

d'où la relation : $b^2 - 7ac = 0.$

145. *d)* ***Étude du signe des racines de l'équation du second degré.***

Les propriétés des racines de l'équation du second degré permettent, **sans résoudre l'équation,** *de déterminer le signe de ses racines.*

Il faut d'abord examiner si les racines existent ; pour cela on recherche le signe du discriminant $b^2 - 4ac$.

Si $b^2 - 4ac$ est $\geqslant 0$, les racines existent ;

on examine alors le signe du produit $\frac{c}{a}$.

Si $\frac{c}{a}$ est positif, les deux racines sont de même signe, qui sera celui de leur somme $-\frac{b}{a}$.

Si $\frac{c}{a}$ est négatif, les deux racines sont de signes contraires ; le signe de la somme n'indique plus ici que le signe de la plus grande racine en valeur absolue.

Si $\frac{c}{a} = 0$, l'une des racines est nulle et l'autre est égale à la somme $-b/a$.

Si $-\frac{b}{a} = 0$, les deux racines sont égales en valeur absolue et de signes contraires $x'' = -x'$.

On peut résumer cette discussion dans le tableau suivant :

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$	$\frac{c}{a} > 0$ racines de même signe	$-\frac{b}{a} > 0$	$0 < x' < x''$	
		$-\frac{b}{a} < 0$	$x' < x'' < 0$	
	$\frac{c}{a} = 0$	$x' = 0$	$x'' = -b/a$	
	$\frac{c}{a} < 0$ racines de signes contraires	$-\frac{b}{a} > 0$	$x' < 0 < x''$	$\lvert x' \rvert < x''$
		$-\frac{b}{a} = 0$	$x' = -x''$	
		$-\frac{b}{a} < 0$	$x' < 0 < x''$	$\lvert x' \rvert > x''$
$\Delta = b^2 - 4ac = 0$			$x' = x'' = -\frac{b}{2a}$	
$\Delta = b^2 - 4ac < 0$			pas de racines	

146. Exemples. — 1° *Examiner le signe des racines des équations :*

a) $3x^2 - 5x + 1 = 0$

$\Delta = 25 - 12 = 13 > 0$ racines distinctes

$P = \frac{1}{3} > 0$ de même signe

$S = \frac{5}{3} > 0$ positives.

b) $-2x^2 + 7x + 3 = 0$

$\Delta = 49 + 24 = 73 > 0$ racines distinctes

$P = -\frac{3}{2} < 0$ de signes contraires

$S = \frac{7}{2} > 0$ la plus grande en valeur absolue est positive.

2° *Quel est, suivant les valeurs de m, le signe des racines de l'équation* $3x^2 - 4x + 2(m - 1) = 0$ *où m est un paramètre.*

$\Delta = 4 - 6(m - 1) = 10 - 6m \geqslant 0$ pour $m \leqslant \frac{5}{3}$

$P = \frac{2}{3}(m - 1) > 0$ pour $m > 1$

$S = \frac{4}{3}$ est toujours positif.

Pour $-\infty < m < 1$, $\Delta > 0$, $P < 0$, $S > 0$, les racines sont distinctes, de signes contraires et la plus grande en valeur absolue est positive.

Pour $1 < m < \frac{5}{3}$, $\Delta > 0$, $P < 0$, $S > 0$, les racines sont distinctes, de mêmes signes et positives.

Pour $m = 1$, $P = 0$, $x' = 0$ $x'' = 4/3$.

Pour $m = 5/3$, $\Delta = 0$ $x' = x'' = 2/3$.

Cette discusion peut se résumer dans le tableau suivant :

m	Δ	P	S	
$-\infty$				
	+	—	+	$x' < 0 < x''$ $x'' > \lvert x' \rvert$
1		0		$x' = 0$ $x'' = 4/3$
	+	+	+	$0 < x' < x''$
$\frac{5}{3}$	0			$x' = x'' = 2/3$
				Pas de racines
$+\infty$				

147. *e)* **CONDITION POUR QUE DEUX ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ**

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a'x^2 + b'x + c' = 0$$

AIENT UNE RACINE COMMUNE.

Soient x' et x'' les racines de la première équation ; une condition nécessaire et suffisante pour que la deuxième équation admette comme racine, une de ces quantités est que l'une des égalités :

$$a'x'^2 + b'x' + c' = 0, \qquad a'x''^2 + b'x'' + c' = 0,$$

soit vérifiée, en d'autres termes que le produit :

$$(a'x'^2 + b'x' + c')\,(a'x''^2 + b'x'' + c') \text{ soit nul.}$$

Or, ce produit peut s'écrire :

$$a'^2x'^2x''^2 + a'b'x'x''(x' + x'') + a'c'(x'^2 + x''^2) + b'^2x'x'' + b'c'(x' + x'') + c'^2 = 0.$$

avec, $x' + x'' = -\frac{b}{a} \quad x'x'' = \frac{c}{a} \quad x'^2 + x''^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$;

d'où : $a'^2\frac{c^2}{a^2} - a'b'\frac{bc}{a^2} + a'c'\frac{(b^2 - 2ac)}{a^2} + \frac{b'^2c}{a} - \frac{bb'c'}{a} + c'^2 = 0$

et en groupant, après réduction

$$(a'c - ac')^2 - (a'b - ab')\,(b'c - bc') = 0.$$

Cette quantité est dite le **résolvant** des deux équations.

§ II. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION BICARRÉE.

148. ***L'équation bicarrée est une équation du quatrième degré qui ne renferme que les puissances paires de l'inconnue. Elle est de la forme***

$$ax^4 + bx^2 + c = 0. \qquad (1)$$

Elle peut se ramener facilement à l'équation du second degré en posant : $x^2 = y$.

On a : $$ay^2 + by + c = 0 \qquad (2)$$

qui donne :

$$y' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad y'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Si ces valeurs sont positives, on peut en déduire les valeurs de x.

$$x'_1 = +\sqrt{y'} = +\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x'_2 = -\sqrt{y'} = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x''_1 = +\sqrt{y''} = +\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x''_2 = -\sqrt{y''} = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

DISCUSSION. — Pour que les racines de l'équation (1) existent, il faut d'abord que l'équation (2) admette des racines et que celles-ci soient positives.

En appliquant à l'équation en y la discussion du signe des racines du n° 145, on obtient le tableau suivant :

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$ racines distinctes en y	$\frac{c}{a} > 0$	$-\frac{b}{a} > 0 \quad 0 < y' < y''$	4 racines en x.
		$-\frac{b}{a} < 0 \quad y' < y'' < 0$	aucune racine en x.
	$\frac{c}{a} = 0 \quad y' = 0 \quad y'' = -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a} > 0$	4 racines en x dont 2 nulles
		$-\frac{b}{a} < 0$	2 racines nulles en x
	$\frac{c}{a} < 0 \quad y' < 0 < y''$		2 racines en x
$\Delta = b^2 - 4ac = 0$ racines égales en y	$y' = y'' = -\frac{b}{2a}$	$-\frac{b}{2a} > 0$	4 racines en x, égales 2 à 2.
		$-\frac{b}{2a} < 0$	aucune racine.
$\Delta = b^2 - 4ac < 0$			aucune racine en y et en x.

Remarques. — 1° Les racines de l'équation bicarrée sont toujours deux à deux opposées.

2° Si $y'' > y'$, $(a > 0)$, les racines sont par ordre de grandeur

$$x''_2 < x'_2 < x'_1 < x''_1.$$

3° On voit immédiatement que les propriétés des racines pour l'équation bicarrée deviennent :

$$x'_1 + x'_2 + x''_1 + x''_2 = 0 \qquad x'_1x'_2x''_1x''_2 = \frac{c}{a}.$$

149. TRANSFORMATION DES RADICAUX DOUBLES.

On appelle radical double une expression de la forme

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$$

où B n'est pas un carré parfait.

Il est possible, dans certains cas, de la mettre sous la forme d'une somme ou d'une différence de radicaux simples.

Soit à chercher deux nombres x et y tels que l'on ait :

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}.$$

Élevons au carré cette relation ; elle devient :

$$A \pm \sqrt{B} = x + y \pm 2\sqrt{xy}$$

et ne peut être vérifiée qu'en égalant les parties rationnelles entre

elles et les parties irrationnelles entre elles. D'où les deux équations :

$$A = x + y$$

$$\sqrt{B} = 2\sqrt{xy} \text{ ou } B = 4xy.$$

Le problème revient à chercher deux nombres dont on connait la somme et le produit ; ce sont les racines de l'équation :

$$X^2 - AX + \frac{B}{4} = 0,$$

soit $x = \dfrac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}$ *et* $y = \dfrac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}$.

Ces valeurs seront acceptables si elles sont :

a) *réelles, ce qui exige* $A^2 > B$;

b) *positives, ce qui exige* $A > 0$ *et* $B > 0$.

Elles seront utiles si elles sont rationnelles, c'est-à-dire si $A^2 - B$ *est un carré parfait.*

Dans le cas d'une différence, le radical $\sqrt{A - \sqrt{B}}$ étant positif, il faudra prendre pour x la plus grande valeur.

Exemple. — a) *Transformer* $\sqrt{10 + \sqrt{19}}$.

On a $\sqrt{10 + \sqrt{19}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

d'où $x + y = 10$ et $4xy = 19$

x et y sont racines de $X^2 - 10X + \frac{19}{4} = 0$.

et : $x = \frac{19}{2}$, $y = \frac{1}{2}$;

d'où : $$\sqrt{10 + \sqrt{19}} = \sqrt{\frac{19}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

b) *Transformer* $\sqrt{z^2 + z + 1 - \sqrt{2z^3 + z^2 + 2z}}$

x et y seront donnés par

$$x + y = z^2 + z + 1$$
$$4xy = 2z^3 + z^2 + 2z$$

et seront racines de :

$$X^2 - (z^2 + z + 1)X + \frac{1}{4}(2z^3 + z^2 + 2z) = 0.$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = (z^2 + z + 1)^2 - (2z^3 + z^2 + 2z) = z^4 + 2z^2 + 1 = (z^2 + 1)^2$$

d'où $$x = \frac{(z^2 + z + 1) + (z^2 + 1)}{2} = \frac{2z^2 + z + 2}{2}$$

$$y = \frac{(z^2 + z + 1) - (z^2 + 1)}{2} = \frac{z}{2}$$

et :

$$\sqrt{z^2 + z + 1 - \sqrt{2z^3 + z^2 + 2z}} = \sqrt{\frac{2z^2 + z + 2}{2}} - \sqrt{\frac{z}{2}}.$$

§ III. RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES.

150. ***Il est possible de ramener à une équation du second degré, la résolution d'un système d'équations à plusieurs inconnues dans quelques cas particuliers.***

Lorsque le système est symétrique par rapport à deux inconnues x et y, *il est souvent avantageux en cherchant à déterminer la somme et le produit de ces quantités, de former une équation du second degré admettant* x *et* y *pour racines :*

Exemple : *Soit à résoudre le système :*

$$x^2 + y^2 = 113,$$
$$x + y = 1.$$

La première équation peut s'écrire

$$(x + y)^2 - 2xy = 1 - 2xy = 113.$$

On en tire immédiatement :

$$xy = -56.$$

On est donc ramené à chercher deux nombres connaissant leur somme et leur produit. Ce sont les racines de l'équation.

$$X^2 - X - 56 = 0,$$

x et y jouant le même rôle, on pourra avoir l'un des groupes suivants de réponses

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = -7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -7, \\ y = 8. \end{cases}$$

2ᵉ Exemple. — *Soit à résoudre le système :*

$$x^5 + y^5 = 211$$
$$x + y = 1.$$

La première équation peut s'écrire

$$(x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) = 211.$$

En remplaçant $x + y$ par sa valeur et en groupant, il vient

$$(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 - xy(x^2 + y^2) = 211$$
$$(1 - 2xy)^2 - x^2y^2 - xy(1 - 2xy) = 211,$$

et, après réduction :

$$x^2y^2 - xy - 42 = 0,$$

équation qui peut être considérée comme une équation du second degré en xy et qui donne les valeurs

$$xy = 7 \quad \text{et} \quad xy = -6.$$

Associée à la seconde des équations primitives, elle donne les équations du second degré suivantes :

$$X^2 - X + 7 = 0$$

qui n'a pas de racines,

et : $$X^2 - X - 6 = 0$$

qui donne les deux groupes

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2, \\ y = 3. \end{cases}$$

Remarques. — *Il est possible par un artifice de calcul de ramener à une forme symétrique, des équations qui, à première vue, ne le sont pas.*

Ainsi le système dissymétrique $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x - y = 5 \end{cases}$

deviendra, en posant $y = -z$ le système symétrique

$$x^2 + z^2 = 13$$
$$x + z = 5$$

donnent les réponses $x = 3$ et $z = 2$, ou $x = 2$, $z = 3$,
auxquelles correspondent $x = 3$ et $y = -2$ ou $x = 2$ et $y = -3$.

Les réponses en x et y ne sont plus interchangeables.

En effet les groupes $x = -2$ et $y = 3$, ou $x = -3$ et $y = 2$ ne vérifient pas la deuxième équation.

Cela provient de ce que, en élevant au carré cette relation, on introduit l'égalité $x - y = -5$ qui répond, elle aussi, à l'équation $(x - y)^2 = 25$. On risque d'introduire ainsi des valeurs nouvelles qui ne satisferont pas aux relations données.

Il est donc nécessaire, lorsque dans une résolution, on élève au carré, de vérifier si les résultats obtenus satisfont bien aux équations proposées.

4° *Résoudre le système :*

$$x^2 + y^2 - (x + y) = 48, \qquad (1)$$
$$x + y + xy = 31. \qquad (2)$$

Prenons pour inconnues auxiliaires la somme et le produit en posant :

$$x + y = z \quad \text{et} \quad xy = u.$$

Nous avons :

$$x^2 + y^2 + 2xy = z^2 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = z^2 - 2xy = z^2 - 2u.$$

Les équations proposées deviennent :

$$z^2 - 2u - z = 48 \qquad (3)$$

et

$$z + u = 31. \qquad (4)$$

La valeur de u, tirée de (4) et portée dans (3), donne

$$z^2 - 2(31 - z) - z = 48,$$
$$z^2 + z - 110 = 0 ;$$

d'où

$$z' = 10 \quad \text{et} \quad z'' = -11.$$

Les valeurs correspondantes de u sont :

$$u' = 21 \quad \text{et} \quad u'' = 42.$$

On a donc les deux systèmes :

$$\begin{cases} x' + y' = 10 \\ x'y' = 21 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x'' + y'' = -11 \\ x''y'' = 42, \end{cases}$$

qui conduisent aux deux équations :

$$X^2 - 10X + 21 = 0 \quad \text{et} \quad X^2 + 11X + 42 = 0.$$

La première a pour racines 3 et 7 ; la seconde n'a pas de racines, car $\Delta = -47$.

Les solutions sont donc :

$$x = 7 \quad \text{et} \quad y = 3 \quad \text{ou} \quad x = 3 \quad \text{et} \quad y = 7.$$

LES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ A UNE INCONNUE

Équations numériques

652. $x^2 - 6x + 8 = 0.$

653. $x^2 - 4x - 21 = 0.$

654. $x^2 + 8x + 12 = 0.$

655. $13(2x - 1)(3 - 5x) = 0.$

656. $9\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) = 0.$

657. $-11x^2 + 14x - 3 = 0.$

658. $10x^2 - 26x + 12 = 0.$

659. $-15x^2 + 11x - 2 = 0.$

660. $x^2 - 4x + 7 = 0.$

661. $4(x - 1)(x - 5) = 0.$

662. $3x^2 + 24x + 21 = 0.$

663. $25x(x + 1) = -4.$

664. $(x - 15)(x + 15) = 400.$

665. $4(x^2 - 1) = 4x - 1$

666. $\frac{9}{x} - \frac{x}{3} = 2.$

667. $\frac{750}{x} + 6 = \frac{720}{x - 5}.$

668. $\frac{30}{x - 2} - \frac{30}{x} = 4.$

669. $x + \frac{1}{x - 3} = 5.$

670. $\frac{x}{7} + \frac{21}{x + 5} = \frac{47}{7}.$

671. $\frac{2x}{x + 2} + \frac{x + 2}{2x} = 2.$

672. $\frac{2x - 1}{x + 1} = \frac{x + 1}{x - 2}.$

673. $\frac{x + 1}{x} + 1 = \frac{x}{x - 1}.$

674. $x + \frac{24}{x - 1} = 3x - 4.$

675. $$\frac{8}{x+6} + \frac{12-x}{x-6} = 1.$$

676. $$\frac{x+8}{x-8} - 2 = \frac{24}{x-4}.$$

677. $$\frac{x+5}{x-5} + \frac{x-5}{x+5} = \frac{10}{3}.$$

678. $$\frac{5x+4}{5x-4} + \frac{5x-4}{5x+4} = \frac{13}{6}.$$

679. $$\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{2x+1}{x+1}.$$

680. $$\frac{x}{x-6} - \frac{1}{2} = \frac{x}{6} + \frac{x+6}{6-x}.$$

681. $$\frac{x}{x-1} - 1 = \frac{x+1}{x}.$$

682. $$(2x+1)^2 - 8\,001 = (x+2)^2.$$

683. $$\left(\frac{1\,026}{x} + 6\right)(x-5) = 1\,089.$$

684. $$\left(\frac{x+4}{x-3}\right)^2 = \left(\frac{x}{2-x} + \frac{1}{4}\right)^2.$$

685. $$\left(\frac{x}{2} - \frac{4}{x-3} + 3\right)^2 - 9\left(\frac{x+2}{2} - \frac{4}{x-3}\right)^2 = 0.$$

Équations littérales

686. $$x^2 - (a+b)x + ab = 0.$$

687. $$x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0.$$

688. $$abx^2 - (a^2+b^2)x + ab = 0.$$

689. $$c^2x^2 + (ac - bc)x - ab = 0.$$

690. $$x^2 - 4bx + 4b^2 - a^2 = 0.$$

691. $$x^2 - 2a^2bx + a^4b^2 - a^2b^4 = 0.$$

692. $$x^2 - 2acx + a^2(c^2 - b^2) = 0.$$

693. $$\frac{a^2x^2}{b^2} - \frac{2ax}{c} + \frac{b^2}{c^2} = 0.$$

694. $$\frac{3}{a} + \frac{3}{a+x} + \frac{3}{a+2x} = 0.$$

695. $$\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2 - 1 = \frac{cx}{ab}.$$

696. $$abcx^2 - (a^2b^2 + c^2)x + abc = 0.$$

697. $$x^2 - 6acx + a^2(9c^2 - 4b^2) = 0.$$

698. $$c^2x^2 - 2acx + a^2 - b^2 = 0.$$

699. $$d^2x^2 - 4abdx + 4a^2b^2 - 9c^2 = 0.$$

700. $$x^2 - 2(a^2+b^2)x + (a^2-b^2)^2 = 0.$$

701. $$(a^2-b^2)x^2 - 2(a^2+b^2)x + a^2 - b^2 = 0.$$

702. $$\frac{(a-x)(x-b)}{(a-x)^2 - (x-b)^2} = x.$$

703. $$\frac{b+a-x}{a} = -\frac{2a}{x-a-b}$$

704. $$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-c} = 0.$$

705. $$\frac{(a-x)^2 - (x-b)^2}{(a-x)(x-b)} = \frac{4ab}{a^2-b^2}.$$

706. $$\frac{x^2}{(m+n)^2} - \frac{4mnx}{(m+n)^2} - (m-n)^2 = 0.$$

707. $$\frac{\frac{a+x}{a-x} + \frac{a-x}{a+x}}{1 - \frac{a-x}{a+x}} = a - 1.$$

708. $$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a+b+x}.$$

709. $$\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 = 8\left(\frac{a-x}{x-b}\right) - 15.$$

710. $$\frac{y^2}{a} + \frac{a}{\sqrt{bc}} = \frac{y\sqrt{b}}{c} + \frac{y\sqrt{c}}{b}.$$

Problèmes simples du second degré sans discussion

711. Le produit des deux termes d'une fraction est 120 ; les deux termes seraient égaux si l'on ajoutait 1 au numérateur et si on le retranchait au dénominateur. Quels sont ces deux termes ?

712. Trouver deux nombres impairs consécutifs tels que la différence de leurs carrés soit 8 000.

713. Une somme de 4 000 francs doit être partagée entre un certain nombre de personnes ; au moment du partage quatre se retirent ce qui augmente de 50 francs la part de chacune. Combien y a-t-il de personnes et quelle est la part de chacune ?

714. Deux voyageurs partent en même temps de Paris et de Château-Thierry. Au moment où ils se rencontrent, le premier a fait douze kilomètres de plus que l'autre ; or, conservant la même vitesse, ils arrivent l'un à Château-Thierry 4 h 2/3 après la rencontre et le second arrive à Paris 7 h 5/7 après la rencontre. Quelle est la distance des deux villes ?

715. Pour 27 000 francs, on a un certain nombre de mètres de drap ; pour la même somme, on peut avoir 3 mètres de moins d'une qualité qui coûte 300 francs de plus que l'autre par mètre. Trouver le prix des deux qualités de drap et la quantité que l'on peut avoir de l'une et de l'autre.

716. Dans un cercle de 15 mètres de rayon, deux cordes qui se coupent ont pour produit de leurs segments respectifs 200. Trouver la distance de leur point d'intersection au centre.

717. Deux cordes se coupent dans un cercle : la longueur de l'une est de 22 mètres, les segments de l'autre ont 12 mètres et 8 mètres. Quels sont les segments de la première ?

718. On a un cercle O de 3 mètres de rayon ; déterminer sur une tangente à ce cercle un point P tel que la sécante PO, menée de ce point au cercle, ait sa partie extérieure moitié de la tangente AP.

719. On a un cercle de 15 mètres de rayon ; d'un point pris à 25 mètres du centre, on mène une tangente à ce cercle. Trouver la longueur de cette tangente.

720. Trouver les trois côtés d'un triangle rectangle, sachant que ces côtés sont trois nombres entiers consécutifs.

721. Trouver les dimensions d'un trapèze de 864 mètres carrés, sachant que la base supérieure est les $\frac{3}{5}$ de la base inférieure et que la hauteur égale le $\frac{1}{3}$ de la somme des bases.

722. La base et la hauteur d'un rectangle sont 50 mètres et 24 mètres ; mener une parallèle au côté de 24 mètres de manière que les deux rectangles qu'elle détermine soient semblables.

723. Trouver les trois côtés d'un triangle rectangle, sachant que le petit côté à 23 mètres de moins que le moyen et que celui-ci à 2 mètres de moins que l'hypoténuse.

724. Les deux diagonales d'un losange ont 18 mètres et 12 mètres : ajouter une même longueur à chacune d'elles de manière que la surface du losange formé soit double de celle du premier.

725. Les dimensions d'un rectangle sont 20 mètres et 15 mètres ; des extrémités d'une diagonale on porte sur chacun des côtés une même longueur, on joint entre eux les quatre points obtenus de manière à former un parallélogramme. Quelle doit être la longueur portée pour que la surface du parallélogramme soit le quart de celle du rectangle ?

726. On élève une perpendiculaire sur le milieu de la base supérieure d'un carré ; quelle doit être la longueur de cette perpendiculaire pour que joignant son extrémité aux deux sommets les plus voisins et prolongeant jusqu'à la rencontre de la base inférieure prolongée, le triangle formé ait une surface triple de celle du carré donné : le côté du carré est $a = 24$ mètres.

727. Un rectangle est terminé à ses deux extrémités par un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse égale la largeur du rectangle ; trouver cette largeur, sachant que la surface de la figure totale est 896 mètres carrés, et que la plus grande longueur de la figure est 64 mètres.

728. Quelle largeur faut-il donner à la bordure d'un bassin circulaire de 12 mètres de rayon intérieur, pour qu'elle ait même surface que le bassin.

729. D'un point situé à une distance d du centre d'une circonférence mener une sécante telle que sa partie extérieure soit égale à la partie intérieure. Trouver cette sécante.
Application : $r = 5$ mètres et $d = 15$ mètres.

730. Quel est le polygone qui a 230 diagonales ? On établira d'abord la formule qui donne le nombre de diagonales d'un polygone de n côtés.

731. Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle sont AB = 15 mètres, AC = 18 mètres ; à partir de A on porte vers B une longueur AP = x sur le milieu de laquelle on élève une perpendiculaire ; on joint à A et à P le point où elle rencontre l'hypoténuse. Quelle doit être la longueur de x pour que le triangle ainsi formé soit les $\frac{3}{8}$ du triangle donné ?

Propriétés des racines

732. Former une équation du second degré qui a pour racines :

1° 7 et -3,

2° 3 et $1/2$,

3° $a + b$ et $a - b$,

4° $a + b$ et $\frac{1}{a+b}$,

5° $\frac{1}{a+b}$ et $\frac{1}{a-b}$,

6° $\frac{a+b}{a-b}$ et $\frac{a-b}{a+b}$.

733. Former l'équation dont l'une des racines égale :

1° $3 + \sqrt{2}$,

2° $4 + \frac{2}{\sqrt{5}}$,

3° $a + \sqrt{b}$,

4° $\frac{a}{b\sqrt{3}}$.

734. Trouver deux nombres ayant :

1° pour somme 18 et pour produit 45

2° pour somme 14 et pour produit 49

3° pour somme 4 et pour produit -12

4° pour somme -10 et pour produit 16.

Dans les équations suivantes, indiquer sans résoudre si les racines existent et quel est leur signe.

735. $x^2 + 8x + 12 = 0.$

736. $5x^2 - 12x - 50 = 0.$

737. $4x^2 - 20x + 25 = 0.$

738. $3x^2 - 4x + 8 = 0.$

Discuter suivant les valeurs de a le signe des racines des équations suivantes :

739. $x^2 - 3x + 2(a - 1) = 0.$

740. $2x^2 - (2a - 1)x + (a - 2) = 0.$

741. $ax^2 - 6(a - 1)x + 9(a - 3) = 0.$

742. $(a - 2)x^2 - 3(a - 2)x + (2a - 1) = 0.$

743. $(a - 3)x^2 - 2(a + 4)x - 4(a - 3) = 0.$

744. Dans l'équation $x^2 - 7x + q = 0$, déterminer q de manière que l'une des racines soit :

1° égale à 3, 3° égale à $\frac{4}{5}$,

2° égale à -3, 4° égale à zéro.

745. Dans l'équation $x^2 - px + 36 = 0$, déterminer p de manière que l'on ait :

1° $x' = x''$,

2° $x' = -x''$,

3° $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{5}{12}$.

746. Dans l'équation $x^2 - 8x + q = 0$, déterminer q de manière que l'on ait :

1° $x' = x''$,

2° $x' = 3x''$,

3° $x' = \frac{1}{x''}$,

4° $x' = -\frac{1}{x''}$,

5° $3x'' - 4x' = 3$,

6° $x'^2 + x''^2 = 40$.

747. Dans l'équation $(a - b)^2x^2 + 2(a^2 - b^2)x + n = 0$, déterminer n pour que les racines soient : 1° égales ; 2° inverses.

748. Quelles valeurs doit prendre c pour que l'équation

$$3x^2 - 10x + c = 0 :$$

1° ait une racine nulle ;
2° n'ait pas de racines ?

749. On donne l'équation $8x^2 - (m - 1)x + m - 7 = 0$; quelles valeurs faut-il donner à m pour que les racines soient ;

1° égales ;
2° opposées ;
3° inverses ;
4° l'une égale à zéro ?

750. Dans l'équation $x^2 + px + q = 0$, déterminer p et q sans calculer les racines de telle sorte que la différence des racines soit 4 et celle de leurs cubes 208.

751. Les deux racines d'une équation du second degré ont pour différence a^2b^2 et pour produit $\left(\frac{a^4 - b^4}{2}\right)^2$. Calculer ces deux racines.

752. Étant donnée l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, former une autre équation dont les racines soient :

1° les opposées de celles de l'équation donnée ;
2° les inverses de celles de l'équation donnée ;
3° celles de l'équation donnée multipliées par m ;
4° celles de l'équation donnée augmentées de h ;
5° les carrés de celles de l'équation donnée ;
6° les inverses des carrés de celles de l'équation donnée ;
7° les rapports $\frac{x'}{x''}$ et $\frac{x''}{x'}$ des racines de l'équation donnée.

753. Former une équation du second degré dont les racines satisfont aux relations suivantes :

$$x'x'' + x' + x'' - m = 0,$$
$$x'x'' - m(x' + x'') + 1 = 0.$$

754. On donne l'équation $x^2 + px + q = 0$, et l'on demande :

1° Quelles valeurs il faut donner à p et à q pour que les racines soient précisément p et q ?

2° Former l'équation du second degré qui admet pour racines les carrés des racines de l'équation donnée.

3° Ayant attribué à p une valeur déterminée, quelle valeur faut-il donner à q pour qu'une racine soit double de l'autre ?

4° Lorsque $p = -2$, quelle valeur faut-il donner à q pour que l'une des racines soit égale au carré de l'autre ?

755. On a l'équation $(2m - 1)x^2 + 2(1 - m)x + 3m = 0$.
Déterminer m : 1° de façon que l'équation ait -1 pour racine ; 2° de telle sorte que la somme des carrés des racines égale 4.

756. Dans l'équation $2x^2 - (2m + 1)x + m^2 - 9m + 39 = 0$, quelle valeur faut-il donner à m pour que l'équation ait une racine double de l'autre ? Résoudre l'équation pour la valeur obtenue.

757. Quelle relation doit-il exister entre les coefficients de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, pour que :

1° la différence des carrés des racines égale un nombre donné m ?
2° $mx' + nx'' = a$?

758. A quelle condition doivent satisfaire a, b, c pour que les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ soient proportionnelles à deux nombres donnés m et n ?

759. On demande de déterminer la relation qui doit exister entre p et q pour que l'une des racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$ soit n fois plus grande que l'autre. On appliquera au cas où $n = 4$, en ne prenant pour p et q que les valeurs entières plus petites que 30.

760. On donne les deux équations : $x^2 - 5x + k = 0$, $x^2 - 7x + 2k = 0$, et l'on demande de déterminer k de telle sorte que l'une des deux racines de la seconde soit double de l'une de celles de la première.

761. Trouver la relation qui lie les racines de l'équation

$$x^2 - 2x\sqrt{p^2 - 2q} + p^2 - 2q = 0 \text{ à celles de } x^2 + px + q = 0.$$

Si l'on construit un rectangle ayant pour dimensions les racines de la seconde, quelles sont les lignes que représentent les racines de la première?

Résoudre la même question pour les équations

$$x^2 - \frac{(p^2 - 2q)(1 + q^2)}{q^2}x + \frac{(p^2 - 2q)^2}{q^2} = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + px + q = 0.$$

762. On a les équations $x^2 - 7x + 12 = 0$ et $x^2 - 3x + q = 0$; déterminer q de manière que ces deux équations aient une racine commune.

763. On donne les deux équations : $x^2 + mx + 1 = 0$, $x^2 + x + m = 0$. Déterminer m de manière que les deux équations admettent une racine commune.

764. Déterminer m et n de telle sorte que les deux équations :

$$(5m - 52)x^2 - (m - 4)x + 4 = 0,$$
$$(2n + 1)x^2 - 5nx + 20 = 0$$

aient les mêmes racines.

765. Déterminer a et b de telle sorte que les deux équations :

$$(a + b)x^2 - (a + 4)x + 2b = 0,$$
$$(a + b)^2x^2 + (b - 5)x + 5b = 0$$

aient les mêmes racines.

Équations bicarrées et radicaux doubles

Résoudre les équations suivantes :

766. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$

767. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$

768. $x^4 - 8x^2 - 9 = 0.$

769. $x^4 - 24x^2 - 25 = 0.$

770. $x^4 - 18x^2 + 81 = 0.$

771. $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0.$

772. $a^2b^2x^4 - (a^4 + b^4)x^2 + a^2b^2 = 0.$

773. $x^4 + 4abx^2 - (a^2 - b^2)^2 = 0.$

Transformer en radicaux simples les expressions :

774. $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}.$

775. $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}.$

776. $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}.$

777. $\sqrt{28 + 10\sqrt{3}}.$

778. $\sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 - b^2}}.$

Simplifier les expressions :

779. $$\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}.$$

780. $$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{5}{12} - \frac{1}{\sqrt{6}}}.$$

781. $$\sqrt{\frac{x^3 - 3x + (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4}}{2}} + \sqrt{\frac{x^3 - 3x - (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4}}{2}}.$$

Équations du second degré à plusieurs inconnues

Résoudre les systèmes d'équations :

782. $x + y = 20,\quad xy = 64.$

783. $x - y = 9,\quad xy = 90.$

784. $x^2 + y^2 = 625,\quad x + y = 35.$

785. $x^2 + y^2 = 164.\quad x - y = 2.$

786. $x^2 + y^2 = 208,\quad xy = 96.$

787. $x^3 + y^3 = 117.\quad xy = -10.$

788. $x^2 - y^2 = 35,\quad xy = 24.$

789. $x + y = 10,\quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2}.$

790. $(7 + x)(6 + y) = 80,\quad x + y = 5.$

791. $x^2 + y^2 + xy = 52.\quad x + y = 8.$

792. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a},\quad xy = b^2.$

793. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2},\quad xy = b^2.$

794. $x + y = a,\quad \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = b.$

795. $x^2y^4 - 7xy^2 = 1\,710,\quad xy - y = 12.$

796. $x^4 - 2x^2y + y^2 = 49,\quad x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - x^2 + y^2 = 20.$

797. $x + y + z = 36,\quad xy = 108,\quad x^2 + y^2 = z^2.$

798. $x + y + z = 29,\quad x^2 + y^2 + z^2 = 289,\quad xy = 72.$

799. $x + y + z = 132,\quad x^2 = y^2 + z^2.\quad x^2 + y^2 + z^2 = 6\,050.$

800. $x + y = 5z,\quad x^2 + y^2 = 13z^2.\quad xyz = 384.$

801. $x^2 + y^2 + z^2 = 14,\quad xy + yz - zx = 7,\quad x + y + z = 6.$

802.

$$x + y + z = a,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 2a + 2,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3 + 3a^2 + 3a.$$

803. Un nombre est formé de deux chiffres ; si on lui ajoute 9, on trouve le même nombre renversé, et si on divise ce nombre par le produit des deux chiffres, on a 6 pour quotient : trouver ce nombre.

804. Deux ouvriers reçoivent l'un 16 000 francs, l'autre 9 000 francs ; le premier a travaillé cinq jours de plus que le second. Si chacun avait travaillé le nombre de jours qu'à travaillé l'autre, ils auraient reçu la même somme : on demande le nombre de journées de travail de chaque ouvrier et le prix de sa journée.

805. Deux capitaux sont prêtés à des taux différents ; le premier capital, qui produit 500 francs par an, surpasse de 4 000 francs le second capital, qui produit 390 francs ; mais le taux de ce dernier surpasse de 1,50 f. le taux du premier ; déterminer ces deux capitaux.

806. Dans une proportion, les deux premiers termes sont entre eux comme 2 est à 3, et le produit des quatre termes égale 81 fois le carré du premier ; déterminer les deux derniers termes.

807. Trouver quatre nombres en proportion, connaissant la somme de leurs carrés 62,5, sachant de plus que le premier surpasse le deuxième de 4, et que le troisième surpasse le quatrième de 3.

808. Dans une proportion les moyens sont égaux, la somme des trois termes distincts est 28, la différence des deux premiers termes est 8 ; déterminer cette proportion.

809. Calculer les termes d'une proportion dont les moyens sont égaux, connaissant la somme 15 des deux premiers termes, et la somme 13 du premier et du dernier.

810. Dans une proportion, la différence des deux premiers termes est 6 ; celle des deux derniers est 5 ; la somme des carrés des quatre termes est 793 ; trouver cette proportion.

811. Trouver les quatre termes d'une proportion, connaissant la somme 130 de leurs carrés, et les produits 6, 12, 18 du premier terme par chacun des trois autres.

812. Trouver deux nombres tels que leur somme soit à leur produit comme 2 est à 3, et que la somme de leurs carrés soit le quintuple de la somme des nombres.

813. Calculer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, connaissant :

1° L'hypoténuse 25 mètres et la somme 47 mètres des côtés de l'angle droit avec la hauteur.

2° La hauteur 12 mètres et la somme 35 mètres des côtés de l'angle droit.

814. Calculer la base supérieure d'un trapèze inscrit dans un demi-cercle de rayon donné R, sachant que : 1° la surface du trapèze égale m fois le carré de la hauteur ; 2° la somme des bases égale celle des deux autres côtés.

815. On donne, dans un triangle isocèle, la hauteur h correspondant à la base $2a$; et le rayon r du cercle inscrit. On demande de calculer, en fonction de h et de r, les côtés égaux b, la base $2a$ et le rayon R du cercle circonscrit. Que faut-il faire pour que le centre de ce dernier cercle soit sur la circonférence du cercle inscrit ?

816. Par un point A situé dans un angle droit, on mène une sécante BAC qui détermine sur les côtés de l'angle deux segments $\overline{OC} = x$, $\overline{OB} = y$. Déterminer cette sécante de manière qu'on ait $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{c^2}$. On posera les distances du point A aux côtés égales à a et b.

817. La somme des 12 arêtes d'un parallélépipède rectangle est 48 mètres ; la somme des carrés de trois arêtes issues du même sommet égale 50 ; la base a 12 m² de superficie. Quelles sont les trois dimensions ?

818. On donne la hauteur h et l'arête l d'un tronc de cône entièrement circonscrit à une sphère. On propose de calculer, d'après ces données, la surface totale et le volume du tronc.

819. Calculer les rayons x et y des bases d'un tronc de cône circonscrit à une sphère de rayon donné a, sachant que le volume d'un tronc égale deux fois celui de la sphère.

CHAPITRE IX

TRINOME DU SECOND DEGRÉ

§ I. SIGNE DU TRINOME. APPLICATIONS.

151. **DÉFINITIONS.** — ***On appelle trinôme (ou fonction) du second degré, une expression de la forme***

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

où x, variable indépendante peut prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$ et où a, b et c sont des coefficients numériques connus.

On appelle **racines du trinôme,** *les racines de l'équation*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

obtenues en égalant le trinôme à zéro.

Elles peuvent être distinctes, égales ou ne pas exister suivant que le discriminant $b^2 - 4ac$ est positif, nul ou négatif.

Remarque importante. — *On distinguera soigneusement l'équation et le trinôme du second degré.*

L'équation est une égalité qui n'est vérifiée que pour deux valeurs au plus de x ; x ne peut donc y prendre que l'une ou l'autre de ces deux valeurs si elles existent.

Dans le trinôme, au contraire, x est une variable qui peut prendre n'importe quelle valeur. Il en résulte pour le trinôme une certaine valeur que nous allons étudier.

Nous chercherons d'abord quel sera le signe de cette valeur du trinôme suivant les intervalles où varie x, et ensuite dans quel sens et dans quelles limites varie la grandeur même de y.

152. ÉTUDE DU SIGNE DU TRINOME DU SECOND DEGRÉ.

Nous distinguerons trois cas suivant que le trinôme a des racines distinctes ou des racines égales ou n'a pas de racines.

1er **Cas : $b^2 - 4ac > 0$.** — *Le trinôme a des racines distinctes.* Ces racines x' et x'' vérifient les deux relations :

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \text{ et } x'x'' = \frac{c}{a}.$$

On peut écrire :

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$
$$= a[x^2 - (x' + x'')x + x'x'']$$
$$f(x) = a(x - x')(x - x''). \qquad (1)$$

Soit $x' < x''$.

Lorsque x est compris dans l'intervalle $-\infty$, x', les facteurs $x - x'$ et $x - x''$ sont négatifs, leur produit est positif et **y ou f(x) sera du signe du coefficient a du premier terme** (ou terme en x^2).

Ce résultat se note en abrégé af(x) > 0.

Lorsque x varie dans l'intervalle x', x'' le facteur $x - x'$ est positif, le facteur $x - x''$ est négatif ; leur produit est négatif et y ou $f(x)$ **est de signe contraire à celui de a,** ce qui se note :

$$af(x) < 0.$$

Lorsque x est compris entre x'' et $+\infty$, les deux facteurs $x - x'$ et $x - x''$ sont positifs ainsi que leur produit et y ou **f(x) est du signe de a,** ce qui se note :

$$af(x) > 0.$$

Ce résultat peut se résumer dans le tableau suivant :

x		$-\infty$	x'	x''	$+\infty$
$x - x'$		$-$		$+$	$+$
$x - x''$		$-$		$-$	$+$
$f(x)$	$a > 0$	$+$		$-$	$+$
	$a < 0$	$-$		$+$	$-$

Lorsque le trinôme du second degré admet deux racines distinctes, il est du signe de son premier terme lorsque x prend une valeur extérieure aux racines (inférieure à la plus petite ou supérieure à la plus grande) et il est de signe contraire à celui de son premier terme lorsque x prend une valeur comprise entre les racines.

2e **Cas : $b^2 - 4ac = 0$.** — *Les racines sont égales.* Les propriétés des racines restant exactes, lorsque les deux racines sont égales, on peut déduire immédiatement de ce qui précède que, lorsque $x' = x''$,

$$y = f(x) = a(x - x')^2.$$

Le trinôme est donc égal au produit du coefficient de son premier terme par un carré parfait ; ***il est donc toujours du signe de son premier terme.***

$$af(x) > 0.$$

3e Cas : $b^2 - 4ac < 0$. — *Le trinôme n'a pas de racines.*

Reprenons un calcul analogue à celui de la résolution de l'équation du second degré ; on aura successivement :

$$y = f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right].$$

$$y = f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

L'expression entre crochets est formée d'un carré et d'un terme $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$, qui est positif puisque $b^2 - 4ac$ est négatif.

Le produit est donc toujours du signe de a et l'on a :

$$af(x) > 0.$$

Lorsque le trinôme du second degré n'a pas de racines, il est toujours du signe de son premier terme.

En résumé : ***Le trinôme du second degré est toujours du signe de son premier terme, sauf pour les valeurs de x comprises entre les racines supposées distinctes.***

APPLICATIONS DE L'ÉTUDE DU TRINOME DU SECOND DEGRÉ.

153. *a)* DÉCOMPOSITION EN FACTEURS DU TRINOME DU SECOND DEGRÉ.

La formule (1) permet la décomposition immédiate en facteurs du trinôme du second degré.

Soit à décomposer : $3x^2 - 5x + 2$ en facteurs du premier degré.

Les racines de ce trinôme étant 1 et $\frac{2}{3}$, on peut écrire :

$$3x^2 - 5x + 2 = 3(x - 1)\left(x - \frac{2}{3}\right) = (x - 1)(3x - 2).$$

De même : $21x^2 + x - 2$

qui admet pour racines $\frac{2}{7}$ et $-\frac{1}{3}$ peut s'écrire :

$$21\left(x - \frac{2}{7}\right)\left[x - \left(-\frac{1}{3}\right)\right],$$

$$= 21\,\frac{(7x - 2)}{7}\,\frac{(3x + 1)}{3} = (7x - 2)(3x + 1).$$

154. *b)* RÉSOLUTION DES INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

Résoudre une inéquation du second degré revient à chercher pour quelles valeurs de x, les expressions de la forme :

$$ax^2 + bx + c$$

seront positives ou négatives.

Pour résoudre ces inéquations, on s'appuie sur la règle du signe du trinôme ; et on se pose les trois questions suivantes :

1) *Quelle est la nature des racines du trinôme envisagé ?*
2) *Quel est le signe du premier terme du trinôme ?*
3) *Quel est le signe désiré pour l'expression étudiée*

et l'on conclut d'après la règle du signe du trinôme.

1er Cas. — *Le trinôme a des racines distinctes* x' *et* x'' $(x' < x'')$. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

Si le trinôme $ax^2 + bx + c$ doit être du signe de a, x devra être extérieur aux racines.

$$x < x' \quad \text{ou} \quad x'' < x.$$

Si le trinôme $ax^2 + bx + c$ doit être de signe contraire à celui de a, x devra être compris entre les racines :

$$x' < x < x''.$$

2e Cas. — *Le trinôme a des racines égales ou n'a pas de racines.*

Si le trinôme $ax^2 + bx + c$ doit être du signe de a, x peut prendre n'importe quelle valeur, **l'inéquation est toujours vérifiée.**

Si le trinôme $ax^2 + bx + c$ doit être de signe contraire à celui de a, x ne peut prendre aucune valeur, **l'inéquation n'est jamais vérifiée.**

Exemple. — *Quelles sont les valeurs de* x *qui satisfont aux inéquations suivantes :*

a) $3x^2 - 14x + 8 < 0$.

Ce trinôme du second degré a des racines distinctes $(\Delta = 49 - 24 = 25)$ et doit être de signe contraire à celui de son premier terme ; x devra être compris entre les racines $\frac{2}{3}$ et 4.

$$\frac{2}{3} < x < 4.$$

b) $-2x^2 + 5x + 7 < 0$.

Ce trinôme du second degré a des racines distinctes $(\Delta = 25 + 56 = 81)$ et doit être du signe de son premier terme ; x devra être à l'extérieur des racines -1 et $7/2$.

$$x < -1 \qquad 7/2 < x.$$

c) $3x^2 - 2x + 4 < 0$.

Ce trinôme du second degré n'a pas de racines $(\Delta = 1 - 12 = -11)$ et devrait être de signe contraire à celui de son premier terme. Inéquation jamais vérifiée.

d) $4x^2 - 12x + 9 > 0$.

Ce trinôme du second degré a des racines égales $(\Delta = 36 - 36 = 0)$ et doit être du signe de son premier terme ; cette inéquation est toujours vérifiée sauf pour $x = \frac{3}{2}$ où le premier membre s'annule.

Remarque. — Une inéquation de la forme :

$$(x - m)(x - n) \gtrless 0$$

est un trinôme du second degré décomposé en facteurs et admettant des racines distinctes ; on lui appliquera donc immédiatement les règles précédentes.

Exemple a) : $(2x - 5)(3 - x) > 0$

donnerait le trinôme $-2x^2 + 11x - 15 > 0$

c'est donc un trinôme du second degré à racines distinctes qui doit être de signe contraire à celui de son premier terme, donc :

$$\frac{5}{2} < x < 3$$

b) $(3x + 5)(2x - 1) > 0$

donnerait un trinôme du second degré à racines distinctes devant être du signe de son premier terme, donc il faut :

$$x < -\frac{5}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} < x.$$

155. ***L'inéquation $\frac{mx + n}{px + q} \gtrless 0$ se ramène à la forme précédente, car le rapport de ces deux termes a même signe que leur produit :***

$$(mx + n)(px + q).$$

Exemple : $\frac{3x - 4}{2x + 1} > 0$

revient à : $(3x - 4)(2x + 1) > 0$

et est vérifiée pour : $x < -\frac{1}{2}$ et $\frac{4}{3} < x$.

De même : $\frac{2x - 3}{x - 5} > 4$

peut s'écrire : $\frac{2x - 3}{x - 5} - 4 = \frac{-2x + 17}{x - 5} > 0$

qui équivaut à : $(-2x + 17)(x - 5) > 0$

vérifiée pour : $5 < x < \frac{17}{2}$.

Applications à des inéquations diverses.

Exemple : a). — *Quelles sont les valeurs de* x *qui satisfont à l'inéquation*

$$\frac{2x - 7}{3x^2 - 5x + 2} > 0.$$

Cette expression est du même signe que :

$$(2x - 7)(3x^2 - 5x + 2) > 0.$$

Or, $2x - 7$ est positif pour $x > \frac{7}{2}$.

$3x^2 - 5x + 2$ est positif pour : $x < \frac{2}{3}$ et $1 < x$.

Le tableau suivant donne le signe du produit

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$2x - 7$		$-$		$-$		$-$		$+$	
$3x^2 - 5x + 2$		$+$		$-$		$+$		$+$	
Produit		$-$		$+$		$-$		$+$	

L'inégalité est donc **vérifiée** pour :

$$\frac{2}{3} < x < 1 \quad \text{et} \quad \frac{7}{2} < x.$$

b) *Quelles sont les valeurs de* x *qui vérifient l'inéquation*

$$\frac{5x^2 - 7x - 3}{3x^2 - 2x - 5} > 1.$$

Cette inégalité peut s'écrire :

$$\frac{5x^2 - 7x - 3}{3x^2 - 2x - 5} - 1 > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{2x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 2x - 5} > 0.$$

Elle est vérifiée quand :

$$(2x^2 - 5x + 2)(3x^2 - 2x - 5) > 0.$$

Or, $2x^2 - 5x + 2$ est un trinôme du second degré qui admet deux racines distinctes 2 et $\frac{1}{2}$; il est du signe de son premier terme

pour : $x < \frac{1}{2}$ et $2 < x$.

$3x^2 - 2x - 5$ est un trinôme du second degré à racines distinctes -1 et $\frac{5}{3}$ qui est du signe de son premier terme pour :

$$x < -1 \quad \text{et} \quad \frac{5}{3} < x.$$

Le tableau suivant permet d'avoir le signe du produit

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{3}$		2		$+\infty$
$2x^2 - 5x + 2$		$+$		$+$		$-$		$-$		$+$	
$3x^2 - 2x - 5$		$+$		$-$		$-$		$+$		$+$	
P		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$	

L'inéquation est vérifiée pour :

$$x < -1 ; \quad \frac{1}{2} < x < \frac{5}{3} ; \quad 2 < x.$$

Remarque. — En se basant sur une propriété déduite de la continuité, on peut simplifier le travail de recherche.

Un polynôme ne peut changer de signe qu'en s'annulant et un trinôme du second degré change de signe pour l'une de ses racines distinctes.

Remarquant d'autre part qu'un polynôme pour $x = \pm \infty$ est du signe de son terme de degré le plus élevé, on voit que le produit :

$$(2x^2 - 5x + 2)(3x^2 - 2x - 5)$$

qui admet les racines -1, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{3}$ et 2, aura alternativement les signes suivants :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{3}$		2		$+\infty$
P		+		—		+		—		+	

De même : $(2x+3)(3x^2-7x+2)(x^2+5x+6)$

admet les racines : -3, -2 $-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{3}$ et 2.

Son premier terme est : $6x^5$ négatif pour $x = -\infty$.
On aura donc :

x	$-\infty$		-3		-2		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
P		—		+		—		+		—		+	

On vérifie l'exactitude en remarquant que pour $x = +\infty$, le produit est positif, du signe de $6x^5$.
On fera bien attention dans ce procédé aux racines doubles qui n'altèrent pas le signe du trinôme, donc du produit.

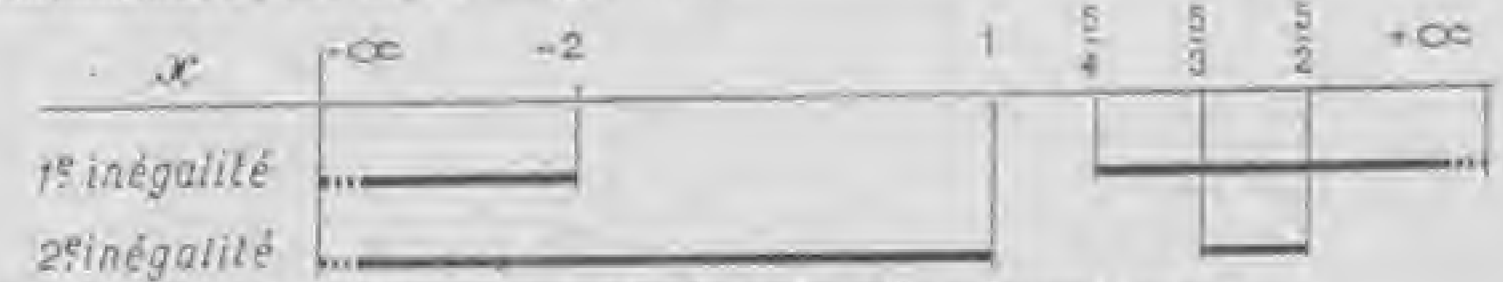
156. INÉQUATIONS SIMULTANÉES.

Quelles sont les valeurs de x *qui vérifient simultanément les inéquations :*
$$4x^2 + 3x - 10 > 0$$
et
$$(3x-5)(2x^2-7x+5) < 0.$$

La première inégalité est vérifiée par $x < -2$ $\frac{5}{4} < x$.

La seconde pour : $x < 1$ $\frac{5}{3} < x < \frac{5}{2}$.

Le tableau suivant permet de trouver les valeurs de x qui vérifient simultanément les deux inégalités.



Les deux inégalités sont vérifiées simultanément pour
$$x < -2 \quad \frac{5}{3} < x < \frac{5}{2}.$$

3° APPLICATION. — CLASSEMENT D'UNE VALEUR PAR RAPPORT AUX RACINES D'UN TRINOME DU SECOND DEGRÉ.

157. ***Classer une valeur* α *par rapport aux racines d'un trinôme du second degré, c'est chercher quelle place elle occupe par ordre de grandeur vis à vis de ses racines.***

On utilise, pour cela, la propriété du trinôme du second degré de prendre une valeur du même signe que son premier terme, quand on donne à x une valeur extérieure aux racines et une valeur de signe contraire à celui de son premier terme lorsqu'on donne à x une valeur prise entre les racines.

Pour classer une valeur* α *par rapport aux racines :
a) on cherche d'abord s'il y a des racines.
***On cherche le signe du discriminant* $b^2 - 4ac$.**

S'il est **positif** ou **nul**, *il y a des racines.*
S'il est **négatif**, il n'y *a pas de racines* et le problème *n'a pas de sens.*

***b) On substitue à x la valeur à étudier, on fait* $f(\alpha)$.**

Si $f(\alpha)$ *est de* **signe contraire à celui de a, $af(\alpha) < 0$,** *α est entre les racines* $\quad x' < \alpha < x''$.

Si $f(\alpha) = 0$, α est l'une des racines, l'autre est $-\frac{b}{a} - \alpha$.

Si $f(\alpha)$ est du signe du premier terme, $af(\alpha) > 0$,
α est extérieur aux racines, $\alpha < x'$ ou $x'' < \alpha$.

Pour savoir dans quelle éventualité on se trouve : *on compare α à une valeur située entre les racines,* généralement *la demi-somme* $-\frac{b}{2a}$.

Si $\alpha < -\frac{b}{2a}$, *α est plus petit que les racines.*

Si $\alpha > -\frac{b}{2a}$, *α est plus grand que les racines.*

Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

$$\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0 \begin{cases} af(\alpha) < 0 & & x' < \alpha < x'' \\ af(\alpha) = 0 & x' = \alpha & x'' = -\frac{b}{a} - \alpha \\ af(\alpha) > 0 & \begin{cases} \alpha < -\frac{b}{2a} \\ \alpha > -\frac{b}{2a} \end{cases} & \begin{matrix} \alpha < x' < x'' \\ x' < x'' < \alpha. \end{matrix} \end{cases}$$

158. APPLICATIONS. — a) *Placer* -2, 1 *et* 5 *par rapport aux racines de* $\quad 3x^2 - 7x + 1$.

$\Delta = 49 - 12 = 37 > 0$; le trinôme a des racines distinctes.
$f(-2) = 12 + 14 + 1 = 27 > 0$; -2 est extérieur aux racines.
$\frac{S}{2} = \frac{7}{6}$ et $-2 < \frac{7}{6}$; -2 est donc plus petit que les racines.
$f(1) = 3 - 7 + 1 = -3$; 1 est entre les racines.
$f(5) = 75 - 35 + 1 = 41 > 0$; 5 est extérieur aux racines.
$5 > \frac{S}{2} = \frac{7}{6}$, donc 5 est supérieur aux racines.

On a donc le classement : $-2 < x' < 1 < x'' < 5$.

b) *Pour quelles valeurs de* m, *l'équation.*
$$(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$$
a-t-elle deux racines inférieures à 2 ?

Il faut pour cela : 1° qu'il y ait des racines, ce qui exige :
$$\Delta = 4m^2 - (m-5)(m-2) = 3m^2 + 7m - 10 > 0$$

d'où $$m < -\frac{10}{3} \quad \text{ou} \quad 1 < m\,;$$

2° que 2 soit extérieur aux racines, ce qui exige :

$af(2) = (m-5)(-3m-22) > 0$ ou $-\frac{22}{3} < m < 5\,;$

3° que 2 soit plus grand que la demi-somme $2 > \frac{S}{2}$ ou $\frac{S}{2} - 2 < 0$.

$$\frac{2m}{m-5} - 2 < 0 \qquad \frac{10}{m-5} < 0 \qquad m < 5$$

Les trois conditions sont vérifiées simultanément pour

$$-\frac{22}{3} < m < -\frac{10}{3}, \quad 1 < m < 5.$$

c) *Reconnaître la place du nombre 1 par rapport aux racines de l'équation*

$$mx^2 - (1-m)x + m - 1 = 0.$$

Les éléments de la discussion seront donnés par :

$$\Delta = (1-m)^2 - 4m(m-1) = (m-1)(-3m-1) > 0$$

$$-\frac{1}{3} < m < 1$$

$af(1) = m(3m-2) > 0$ pour : $m < 0, \quad \frac{2}{3} < m$

$\frac{S}{2} - 1 > 0, \quad \frac{1-m}{2m} - 1 = \frac{1-3m}{2m} > 0, \quad 0 < m < \frac{1}{3}.$

On peut construire le tableau suivant et en tirer les conclusions.

m	Δ	$af(1)$	$\frac{S}{2}-1$	Conclusions	
$-\infty$					
	$-$	$+$	$-$	Pas de racines	
$-\frac{1}{3}$					$x' = x'' = -2$
	$+$	$+$	$-$	$x' < x'' < 1$	
0					$x' = \infty \quad x'' = -1$
	$+$	$-$	$+$	$x' < 1 < x''$	
$\frac{1}{3}$					
	$+$	$-$	$-$	$x' < 1 < x''$	
$\frac{2}{3}$		0			$x' = -\frac{1}{2} \quad x'' = 1$
	$+$	$+$	$-$	$x' < x'' < 1$	
1					$x' = x'' = 0$
	$-$	$+$	$-$	Pas de racines	
$+\infty$					

Pour les valeurs particulières $m = -\frac{1}{3}$ et $m = 1$, le discriminant est nul, les racines sont égales à la demi-somme.

Pour $m = 0$, le coefficient de x^2 devient nul, l'une des racines tend vers l'infini, l'autre vers $-\frac{c}{b} = \frac{m-1}{1-m} = -1$.

Pour $m = \frac{2}{3}$, $f(1)$ est nulle, l'une des racines est égale à 1, l'autre à la somme moins 1.

159. CLASSEMENT DE DEUX VALEURS PAR RAPPORT AUX RACINES.

On effectuera par le même procédé le classement de deux valeurs par rapport aux racines.

Exemple. — *Déterminer, suivant les valeurs de m, le classement de — 2 et 1 par rapport aux racines de :*

$$(3m+2)x^2 - 2(m-1)x - (m-1) = 0.$$

Formons pour cela, les quantités Δ, $af(-2)$, $\frac{S}{2} - (-2)$, $af(1)$, $\frac{S}{2} - 1$ et étudions leur signe

$$\Delta = (m-1)^2 + (3m+2)(m-1) = (m-1)(4m+1) > 0$$

pour $m < -\frac{1}{4} \ldots 1 < m$,

$af(-2) = (3m+2)(15m+5) > 0$ pour $m < -\frac{2}{3}, \quad -\frac{1}{3} < m$

$\frac{S}{2} - (-2) = \frac{m-1}{3m+2} + 2 = \frac{7m+3}{3m+2} > 0$ pour : $m < -\frac{2}{3}, \quad -\frac{3}{7} < m,$

$af(1) = (3m+2)(5) > 0$ pour : $m > -2/3$

$\frac{S}{2} - 1 = \frac{m-1}{3m+2} - 1 = \frac{-2m-3}{3m+2} > 0$ pour : $-\frac{3}{2} < m < -\frac{2}{3}.$

On peut construire le tableau suivant :

m	Δ	$af(-2)$	$\frac{S}{2}-(-2)$	$af(1)$	$\frac{S}{2}-1$	Conclusions
$-\infty$						$x' = -\frac{1}{3} \quad x'' = 1$
	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-2 < x' < 1 < x''$
$-\frac{3}{2}$						
	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-2 < x' < 1 < x''$
$-\frac{2}{3}$						$x' = \infty \quad x'' = -\frac{1}{2}$
	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$x' < -2 < x'' < 1$
$-\frac{3}{7}$						
	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$x' < -2 < x'' < 1$
$-\frac{1}{3}$		0				$x' = -2 \quad x'' = -\frac{2}{3}$
	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-2 < x' < x'' < 1$
$-\frac{1}{4}$	0					$x' = x'' = -1$
	$-$					Pas de racines
1	0					$x' = x'' = 0$
	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-2 < x' < x'' < 1$
$+\infty$						$x' = -\frac{1}{3} \quad x'' = 1$

Remarques: *a*) La détermination du signe des racines est un cas particulier du problème précédent. Elle revient à placer la valeur 0 par rapport aux racines.

Si $af(0) = ac$ est positif $\left(\frac{c}{a} > 0\right)$, 0 est extérieur aux racines; x' et x'' sont de même signe.

Si $\frac{S}{2}$ est > 0, $\left(-\frac{b}{2a} > 0\right)$, 0 est plus petit que les racines et les deux racines sont positives.

Si $\frac{S}{2}$ est < 0 $\left(-\frac{b}{2a} < 0\right)$, 0 est plus grand que les racines; et les deux racines sont négatives.

Si $af(0) = ac < 0$, $\left(\frac{c}{a} < 0\right)$, 0 est entre les racines et elles sont de signes contraires.

160. ***Le classement d'une ou deux valeurs par rapport aux racines d'une équation du second dégré dans le cas le plus général est un travail assez long. Il peut être simplifié par des remarques sur la forme de l'équation envisagée ou si l'on impose aux racines des conditions particulières.***

a) **Remarque sur l'existence des racines.** *Si l'on constate que pour une certaine valeur α de x, $af(\alpha)$ est négatif, il est inutile de chercher la réalité des racines, ce fait ne pouvant se produire que si ces racines existent et sont distinctes.*

Ainsi l'équation $(2m-1)x^2 - (2m+1)x - (2m-1) = 0$ a toujours des racines car $af(0) = -(2m-1)^2$ est toujours négatif.

b) **Conditions particulières imposées aux racines.**

Nous examinerons les divers cas suivants :

I. 160 bis. CLASSEMENT D'UNE VALEUR PAR RAPPORT AUX RACINES

Soit à classer un nombre α par rapport aux racines du trinôme

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

a) α doit être compris entre les racines.

La condition nécessaire et suffisante est

$$af(\alpha) < 0$$

Cette condition entraine, en effet,
1° que le trinôme a des racines distinctes;
2° que α est entre ces racines.

Exemple : *A quelles conditions le nombre -2 est-il entre les racines du trinôme*

$$(m-2)x^2 - (m+3)x + m - 1 = 0\ ?$$

On a $f(-2) = 7m - 3$

Il faut $af(-2) = (m-2)(7m-3) < 0$

ou $\frac{3}{7} < m < 2.$

b) α doit être supérieur aux racines.

Il faut alors $b^2 - 4ac > 0,$

$af(\alpha) > 0,$

et $\frac{S}{2} - \alpha < 0.$

Exemple : *A quelles conditions le trinôme*

$$mx^2 - (4m-3)x + 4m + 3 = 0$$

a-t-il deux racines inférieures à 3 ?

Il faut $b^2 - 4ac = (4m-3)^2 - 4(4m+3)m$

$= -36m + 9 > 0$ ou $m < \frac{1}{4},$

$af(3) = m(m+12) > 0 \qquad m < -12$ ou $0 < m,$

$\frac{S}{2} - 3 = \frac{4m-3}{2m} - 3 = \frac{-2m-3}{2m} < 0 \quad m < -\frac{3}{2} \quad 0 < m.$

Les trois conditions sont vérifiés simultanément pour

$$m < -12 \text{ et } 0 < m < \frac{1}{4}.$$

c) α doit être inférieur aux racines.

Il faut alors

$b^2 - 4ac > 0,$

$af(\alpha) > 0,$

$\frac{S}{2} - \alpha > 0.$

Exemple : *A quelles conditions l'équation*

$$(4m-3)\,\mathrm{tg}^2 x - (m+1)\,\mathrm{tg}\, x - m = 0$$

a-t-elle deux racines telles que $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$?

Il faut alors $\operatorname{tg} x > 1$

d'où $b^2 - 4ac = (m+1)^2 + 4m(4m-3)$

$= 17m^2 - 10m + 1 > 0$

ou $m < \frac{5-2\sqrt{2}}{17}$ $\frac{5+2\sqrt{2}}{17} < m$

$af(1) = (4m-3)(2m-4) > 0$ $m < \frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{4} < m$

$\frac{S}{2} - 1 = \frac{m+1}{2(4m-3)} - 1 = \frac{-7m+7}{2(4m-3)} > 0$ $\frac{3}{4} < m < 1$

Il faut $\frac{3}{4} < m < 1.$

II. 160 ter. CLASSEMENT DE DEUX VALEURS PAR RAPPORT AUX RACINES

Soit à classer deux valeurs α et β ($\alpha < \beta$) par rapport aux racines de $f(x) = ax^2 + bx + c$

1° ***Une seule racine doit être comprise dans l'intervalle*** α, β.

$$x' < \alpha < x'' < \beta \text{ ou } \alpha < x' < \beta < x''.$$

Dans le premier cas, on doit avoir $af(\alpha) < 0$ et $af(\beta) > 0$.
Dans le second cas, on doit avoir $af(\alpha) > 0$, $af(\beta) < 0$.
Dans les deux hypothèses, $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ sont de signes contraires et le changement de signe postule l'existence des racines.

La condition nécessaire et suffisante est donc :

$$f(\alpha).f(\beta) < 0$$

Exemple : *A quelles conditions le trinôme*

$$(2m-1)x^2 + 3(m-2)x + 2(m+1) = 0$$

a-t-il une racine dans l'intervalle $-1, +2$?

La condition est $f(-1)\,f(2) < 0$

$$f(-1)\,f(2) = (m+7)(16m-14) < 0,$$

ce qui exige $-7 < m < \frac{7}{8}.$

2° ***Les deux racines doivent être comprises dans l'intervalle*** α, β :

$$\alpha < x' < x'' < \beta$$

Il faut que les racines existent : $b^2 - 4ac \geqslant 0.$

que α soit inférieur aux racines : $af(\alpha) > 0.$

$\frac{S}{2} - \alpha > 0.$

que β soit supérieur aux racines. $af(\beta) > 0.$

$\frac{S}{2} - \beta < 0.$

Les valeurs du paramètre qui vérifient simultanément ces cinq inéquations répondent à la question.

Exemple : *A quelles conditions doit satisfaire le paramètre* m *pour que l'équation*

$$(2m-1)\sin^2 x - (m-1)\sin x + m + 1 = 0$$

ait deux racines ?

L'inconnue étant un sinus doit être compris entre -1 et $+1$.

Il faut $\Delta = (m-1)^2 - 4(2m-1)(m+1)$

$= -7m^2 - 6m + 5 > 0$ $-\frac{3+\sqrt{44}}{7} < m < \frac{-3+\sqrt{44}}{7}$

$af(-1) = (2m-1)(4m-1) > 0$ $m < \frac{1}{4}$ $\frac{1}{2} < m$

$\frac{S}{2} - (-1) = \frac{m-1}{2(2m-1)} + 1 = \frac{5m-3}{2(2m-1)} > 0$ $m < \frac{1}{2}$ $\frac{3}{5} < m.$

$af(1) = (2m-1)(2m+1) > 0$ $m < -\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} < m$

$\frac{S}{2} - 1 = \frac{m-1}{2(2m-1)} - 1 = \frac{-3m+1}{2(2m-1)} < 0$ $m < \frac{1}{3}$ $\frac{1}{2} < m.$

Les cinq conditions sont vérifiées simultanément pour

$$-\frac{3+\sqrt{44}}{7} < m < -\frac{1}{2}.$$

§ *II. RÉSOLUTION DE QUELQUES ÉQUATIONS IRRATIONNELLES.*

161. *On appelle équations irrationnelles, celles qui renferment des radicaux dans leur expression.* *Si ces radicaux sont d'indice 2, on peut ramener leur résolution à celle d'équations rationnelles en élevant au carré l'égalité obtenue en isolant un radical dans l'un des membres de l'équation et cela autant de fois qu'il est nécessaire pour rendre l'expression rationnelle.*

Mais en procédant ainsi, on substitue à l'équation proposée une équation plus générale. Ainsi :

$$2x - 3 = \sqrt{3x^2 - 9x + 7} \qquad (1)$$

donne : $4x^2 - 12x + 9 = 3x^2 - 9x + 7$

qui est aussi le carré de :

$$3 - 2x = \sqrt{3x^2 - 9x + 7} \quad \text{ou} \quad 2x - 3 = -\sqrt{3x^2 - 9x + 7} \qquad (2)$$

D'où la nécessité de vérifier que les solutions obtenues donnent bien le même signe aux deux membres de l'équation proposée.

Dans l'exemple précédent, on arrive à l'équation :

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

qui donne pour x les valeurs 1 et 2.

Seule la valeur 2 convient, car elle donne à $2x - 3$ une valeur positive.

La racine 1 correspond à l'équation (2).

Il faut aussi vérifier que la valeur trouvée donne des radicaux portant sur des quantités positives à moins que le système équivalent substitué n'entraine cette condition.

162. Exemples. — 1) *Soit à résoudre*

$$3x - 5 = \sqrt{7x^2 - 12x + 5}.$$

Pour que les deux membres soient égaux en grandeur et signe, il faut :

$$3x - 5 > 0 \quad \text{ou} \quad x > \frac{5}{3}.$$

La quantité sous le radical sera > 0, si

$$7x^2 - 12x + 5 > 0 \quad \text{si} \quad x < \frac{5}{7} \quad \text{ou} \quad 1 < x.$$

Élevons au carré, nous obtenons $2x^2 - 18x + 20 = 0$ dont les racines sont $\frac{9 - \sqrt{41}}{2}$ et $\frac{9 + \sqrt{41}}{2}$.

La seconde seule convient comme supérieure à $\frac{5}{3}$.

2° *Exemple* :

$$3 - \sqrt{x - 1} = \sqrt{3x - 2}.$$

Il faut que $x - 1 > 0$ ou $x > 1$

$3x - 2 > 0$ ou $x > \frac{2}{3}$

et $3 - \sqrt{x - 1} > 0$ ou $x < 10$.

Élevons au carré, il vient :

$$8 + x - 6\sqrt{x - 1} = 3x - 2$$

$$-2x + 10 = 6\sqrt{x - 1}.$$

Si $x < 5$, on peut élever au carré ce qui donne

$$x^2 - 10x + 25 = 9x - 9$$

et : $x^2 - 19x + 34 = 0$

$$x' = 17 \quad \text{et} \quad x'' = 2.$$

La valeur 2 est seule acceptable.

3° *Exemple* : $x - 15 = \sqrt{-x^2 + 8x + 9}$.

Il faut : $x - 15 > 0$ ou $x > 15$

et : $-x^2 + 8x + 9 > 0$ ou $-1 < x < 9$.

Ces conditions étant incompatibles, il n'y a pas de solution.

§ III. INÉQUATIONS IRRATIONNELLES A UNE INCONNUE.

163. THÉORÈMES. — ***Lorsqu'on élève les deux membres d'une inéquation à une même puissance impaire, on obtient une nouvelle inéquation équivalente à la première et de même sens.***

Lorsqu'on élève les deux membres de l'inéquation A > B à une même puissance paire on obtient :

1° Une inéquation équivalente et de même sens si l'on ne considère que les valeurs de l'inconnue rendant A et B positifs.

2° Une inéquation équivalente et de sens contraire si l'on ne considère que les valeurs de l'inconnue rendant A et B négatifs.

Applications — I. *Résoudre l'inéquation*

$$x - 2 > \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - 8}.$$

Élevons les deux membres à la troisième puissance : nous obtenons l'inéquation équivalente :

$$(x - 2)^3 > x^3 + 2x^2 - 8.$$

ou $4x(3 - 2x) > 0$.

laquelle est vérifiée pour $0 < x < \frac{3}{2}$.

II. *Résoudre l'inéquation*

$$\sqrt{(x - 5)(x - 2)} > -\sqrt{(x + 3)(x - 7)}.$$

Les deux radicaux n'ont de valeur numérique que si l'on a simultanément :

$$(x - 5)(x - 2) > 0 \quad \text{et} \quad (x + 3)(x - 7) > 0,$$

c'est-à-dire pour $x < -3$ ou $x > 7$.

Pour ces valeurs, le premier membre est d'ailleurs positif et le second négatif ; l'inéquation est donc vérifiée.

Elle l'est également pour $x = -3$ et $x = 7$, puisque ces valeurs, qui annulent le second membre, rendent le premier positif.

Pour $-3 < x < 7$ l'inéquation ne peut être vérifiée, car alors l'un des radicaux au moins n'a pas de signification.

III. *Résoudre l'inéquation*

$$\sqrt{11x - 5} > \sqrt{7x + 3}. \qquad (1)$$

Les deux membres de cette inéquation n'ont de sens que si $(11x - 5)$ et $(7x + 3)$ sont positifs, c'est-à-dire si

$$x > \frac{5}{11}. \qquad (2)$$

Dans cette hypothèse, ils sont d'ailleurs tous deux positifs. En les élevant au carré, il vient :

$$11x - 5 > 7x + 3.$$

ou $$x > 2. \qquad (3)$$

Les valeurs de x, supérieures à 2, conviennent à l'inéquation donnée

IV. *Résoudre l'inéquation*

$$3x - 5 < \sqrt{x^2 - 2x + 5} + 2x - 3. \qquad (1)$$

Isolons le radical au second membre :

$$x - 2 < \sqrt{x^2 - 2x + 5}. \qquad (2)$$

La quantité sous le radical étant positive quel que soit x, le second membre est toujours positif.

1° Supposons $x < 2$. L'inéquation est vérifiée, puisque le premier membre est négatif.

2° Supposons $x > 2$. Pour ces valeurs, les deux membres sont positifs et nous pouvons les élever au carré sans changer le sens de l'inéquation. Nous obtenons ainsi :

$$(x - 2)^2 < x^2 - 2x + 5, \qquad (3)$$

ou $$x > -\frac{1}{2}.$$

Les valeurs de x supérieures à 2 vérifiant l'inéquation (3) conviennent donc à l'inéquation (1).

Pour $x = 2$, on a : $0 < \sqrt{5}$.

L'inéquation donnée est donc satisfaite pour toutes les valeurs de x.

V. *Résoudre l'inéquation*

$$3x - 4 < \sqrt{(x - 8)(5x - 2)}.$$

Pour que le second membre ait un sens, il faut

$$(x - 8)(5x - 2) > 0,$$

c'est-à-dire $$x < \frac{2}{5} \quad \text{ou} \quad x > 8.$$

Le premier membre est négatif pour $x < \frac{4}{3}$, et positif pour $x > \frac{4}{3}$.

1° Supposons $x \leqslant \frac{2}{5}$. Le premier membre est négatif, le second est positif ou nul, l'inéquation est donc vérifiée.

2° Pour $\frac{2}{5} < x < 8$, l'inéquation ne peut être vérifiée, puisque le second membre n'a pas de sens.

3° Pour $x > 8$, les deux membres de l'inéquation sont positifs et l'inéquation (1) est alors équivalente à

$$(3x - 4)^2 < (x - 8)(5x - 2). \qquad (2)$$

ou $$2x(2x + 9) < 0.$$

L'inéquation (2) est satisfaite pour $-\frac{9}{2} < x < 0$; mais ces valeurs de x inférieures à 8, ne conviennent pas à l'inéquation donnée.

Les seules solutions de l'inéquation (1) sont donc les valeurs de x inférieures à $\frac{2}{5}$ et la valeur $\frac{2}{5}$ elle-même.

TRINOME DU SECOND DEGRÉ

Étude du signe du trinôme. Applications.

Décomposer en facteurs :

820. $15x^2 - x - 6.$

821. $2x^2 - 5x + 2.$

822. $3x^2 + 8x - 3.$

823. $4x^2 - 12x + 9.$

824. $6x^2 - x - 1.$

825. $4x^4 - 17x^2 + 4.$

Simplifier les fractions :

826. $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}.$

827. $\dfrac{2x^2 - 7x + 6}{2x^2 - x - 3}.$

828. $\dfrac{x^2 + 2x - 15}{x^4 + 16x^2 - 225}.$

829. $\dfrac{6x^2 - x - 2}{4x^2 - 4x - 3}.$

830. Décomposer en deux facteurs du premier degré l'expression :

$$(a^2 - 4b^2)x^2 + 2(a^3 + 2b^3)x + a^4 - b^4.$$

831. Trouver la condition pour que

$$(a + bx)^2 + (a' + b'x)^2$$

soit le carré parfait d'une expression du premier degré en x. Montrer que si

$$(a + bx)^2 + (a' + b'x)^2 \quad \text{et} \quad (a + cx)^2 + (a' + c'x)^2$$

sont des carrés parfaits, il en est de même de

$$(b + cx)^2 + (b' + c'x)^2.$$

832. Étant donné le polynôme $ax^2 + bx + c$, déterminer la quantité m par la condition que le polynôme $ax^2 + bx + c + m(x^2 + 1)$ soit un carré parfait. Démontrer que l'équation à laquelle on est conduit pour m a des racines.

Résoudre les inégalités suivantes:

833. $x^2 - 6x + 5 < 0.$

834. $3x^2 - 7x + 4 > 0.$

835. $12x^2 - 4x\sqrt{3} + 1 < 0.$

836. $x^2 - 100x + 42 < 0.$

837. $-5x^2+10x-7>0.$

838. $2x^2-x+5<0.$

839. $4x^2>9.$

840. $3x^2<7x.$

841. $4x^3-10x^2+49x>0.$

842. $3x^3-5x^2+2x<0.$

843. $x(x^2-4)(x^2-3)<0.$

844. $\frac{2x-3}{x-1}>0.$

845. $\frac{x-3}{2x-5}<3.$

846. $3+\frac{1}{x-1}>\frac{1}{2x+1}.$

847. $\frac{x}{x-a}-\frac{2a}{x+a}>\frac{8a^2}{x^2-a^2}.$

848. $\frac{x^2+10x+16}{x-1}>0.$

849. $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}>0.$

850. $\frac{2x^2-6x+3}{x^2-5x+4}>1.$

851. $\frac{x^4-17x^2+60}{x(x^2-8x+15)}>0.$

852. $\frac{x^4-7x^2+12}{x^2-7x+12}>0.$

Trouver les valeurs de x qui satisfont simultanément aux inéquations suivantes :

853. $x^2+x-6>0$ et $x^2+3x-4>0.$

854. $x^2-12x+32>0$ $x^2-13x+22<0.$

855. $x^3-3x^2-10x<0$ $x^3+x^2-12x>0.$

856. $5x-1<(x+1)^2<7x-3.$

857. Quelles valeurs faut-il donner à m pour que le trinôme
$$mx^2+(m-1)x+m-1$$
soit négatif quel que soit x.

858. Quelle valeur faut-il donner à m pour que le trinôme
$$(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6$$
soit positif quel que soit x.

859. Quelles valeurs faut-il attribuer à m pour que le trinôme
$$x^2+2x+m$$
soit supérieur à 10 quel quesoit x.

860. Quelles valeurs faut-il donner à m pour que l'on ait, quel que soit x,
$$\frac{2Kx^2+2mx+m}{4x^2+6x+3}>K \qquad (K>0).$$

861. Trouver les limites des valeurs de x et de y qui peuvent vérifier l'équation $x^2+12xy+4y^2+4x+8y+20=0.$ (Bacc.)

862. Étant donnée l'équation
$$5x^2-12xy+4y^2+54x-4y-139=0,$$
on demande les limites entre lesquelles on peut faire varier x pour que les valeurs de y soient réelles, et entre quelles limites on peut faire varier y pour que les valeurs de x soient réelles. (Bacc.)

Classement d'une valeur par rapport aux racines d'un trinôme. Signe des racines.

Discuter, suivant les valeurs de m, l'existence et le signe des racines des équations suivantes :

863. $(m-3)x^2-2(3m-4)x+7m-6=0.$

864. $mx^2+(m-1)x+(m-1)=0.$

865. $x^2-2(4m-1)x+15m^2-2m-7=0.$

866. $mx^2+2(m+1)x+m=0.$

867. $mx^2-2(m+1)x+3(m-1)=0.$

Dans les équations suivantes dont les coefficients dépendent du paramètre m déterminer la place du nombre donné a par rapport aux racines du trinôme, suivant les valeurs de m :

868. $(m-2)x^2-2(m+1)x+2m-6=0,$ $a=2.$

869. $mx^2-(1-m)x+m-1=0,$ $a=1.$

870. $(1+2m)x^2-2x+2-3m=0,$ $a=2.$

871. $(m-4)x^2+(m-5)x+m-6=0,$ $a=-1.$

Classer, suivant les valeurs de m, les nombres donnés a et b par rapport aux racines des équations suivantes :

872. $(2m+5)x^2+(m-2)x-3m+4=0,$ $a=-1,$ $b=2.$

873. $x^2-2mx+2m^2-4m+3=0$ $a=1,$ $b=2.$

874. $(m-1)x^2-2(m-2)x-7m-1=0$ $a=-1,$ $b=1.$

875. $(2m+1)x^2+3x+4m+5=0$ $a=-2$ $b=1.$

Quelles valeurs doit-on donner à m pour que les racines des équations suivantes satisfassent aux conditions indiquées :

876. $6(m+3)x^2 - 3(m-1)x + 4m = 0 \qquad x' < 3 < x''$.

877. $(m-1)x^2 - (m-5)x + m - 1 = 0 \qquad 1^\circ\ -1 < x' < x'' \qquad 2^\circ\ -2 < x' < x'' < 3$.

878. $(1-m)x^2 - 4x(2-m) + 2(2-m) = 0 \qquad 1^\circ\ x' < x'' < 2 \qquad 2^\circ\ -1 < x' < x'' < 6$.

879. Démontrer que, quelles que soient les valeurs du paramètre, les équations suivantes ont des racines.

$$m(x-1)(x-2) + 2x - 3 = 0$$
$$m^2(x-2) + m(x-1)(x-2) + 3(x-1) = 0.$$

880. Montrer que l'équation $\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b} + \dfrac{1}{x-c} = 0$ a toujours ses racines réelles quels que soient a, b et c.

881. Démontrer que l'équation $\dfrac{a^2}{x-p} + \dfrac{b^2}{x-q} - 1 = 0$ a toujours ses racines réelles, quelles que soient les constantes a, b, p, q.

Équations irrationnelles

Résoudre les équations irrationnelles suivantes :

882. $x + \sqrt{10x+6} = 9$.

883. $\sqrt{5x+10} = x - 8$.

884. $x - \sqrt{x+2} = 1{,}75$.

885. $2x + \sqrt{5-4x} = 2{,}5$.

886. $x - \sqrt{169-x^2} = 17$.

887. $x - \sqrt{25-x^2} = 1$.

888. $x^2 - 6x + 9 = 4\sqrt{x^2-6x+6}$.

889. $2x - x^2 + \sqrt{6x^2-12x+7} = 0$.

890. $\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = 7$.

891. $\sqrt{x+6} + \sqrt{x+1} = \sqrt{7x+4}$.

892. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}} + \sqrt{x} + \sqrt{1+x} = 4$.

893. $\dfrac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}} = \dfrac{4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

894. $\sqrt{3+\sqrt{x}} + \sqrt{4-\sqrt{x}} = \sqrt{7+2\sqrt{x}}$.

895. $\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-3)(x-4)} = 2$.

896. $x + \sqrt{x^2+16} = \dfrac{40}{\sqrt{x^2+16}}$.

897. $\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \sqrt{a+b-2x}$.

Inéquations irrationnelles

Résoudre les inéquations suivantes :

898. $6x + 3 < \sqrt{-x^2-x+6}$.

899. $\sqrt{(x+2)(9-x)} > 3x - 8$.

900. $\sqrt{(x-6)(9-x)} > 3 - x$.

901. $\sqrt{x+4} - \sqrt{x} > \dfrac{2}{10}$.

902. $\sqrt{x-2} - \sqrt{x-6} < 8$.

903. $\sqrt{(x-3)(x-5)} > \sqrt{(x+2)(x-1)} - 4$.

CHAPITRE X

PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ

165. ***Lorsque la résolution d'un problème conduit à une équation du second degré, ce problème est dit du second degré.***

Lorsque les résultats de cette résolution ne sont pas numériques il faut presque toujours examiner s'ils conviennent et remplissent les conditions que postule l'énoncé du problème ou qu'il faut introduire en cours de résolution en raison des calculs effectués.

C'est l'examen de ces questions qui constitue la **discussion du problème du second degré.**

Les conditions à imposer aux racines de l'équation résolvant le problème peuvent être rangées en trois catégories :

a) **conditions de réalité** qui exigent que l'équation ait des racines ;

b) **conditions algébriques** imposées par la nature des calculs effectués ;

c) **condition de grandeur** imposée par la nature des inconnues et le problème posé.

Nous allons étudier différents exemples en nous servant des principes puisés dans l'étude du trinôme du second degré.

166. I. Exemple. — *Calculer les côtés d'un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse et le rayon du cercle inscrit.*

Soient a l'hypoténuse, r le rayon du cercle inscrit, b et c les côtés inconnus de l'angle droit.

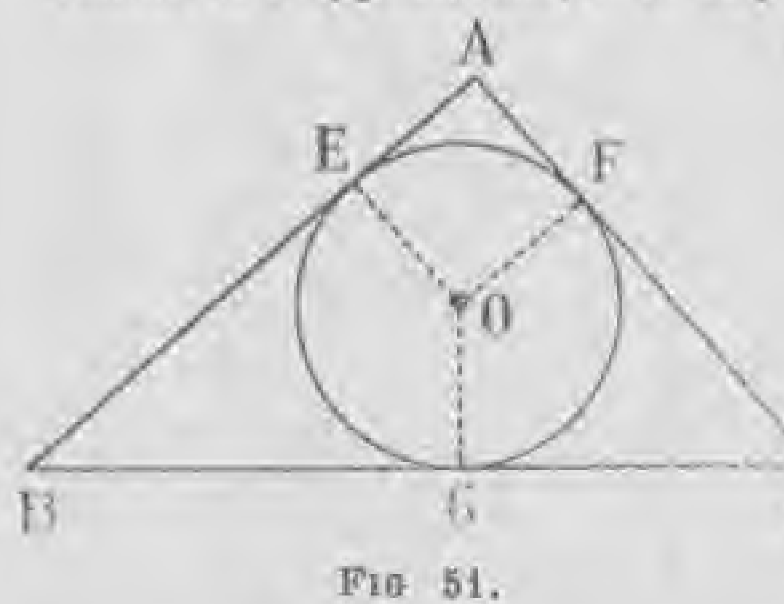


FIG 51.

On a immédiatement l'équation

$$a^2 = b^2 + c^2. \qquad (1)$$

D'autre part le quadrilatère AEOF est un carré et :

$$BG = BE = c - r$$
$$CG = CF = b - r$$

d'où : $BG + CG = BC = a = b + c - 2r$

et la 2ᵉ équation :

$$b + c = a + 2r. \qquad (2)$$

Si l'on élève (2) au carré et retranche (1), on aura :

$$2bc = (a + 2r)^2 - a^2$$
$$bc = 2ar + 2r^2,$$

b et c sont donc racines de l'équation :

$$X^2 - (a + 2r)X + 2r(a + r) = 0$$

et

$$\left.\begin{matrix} b \\ c \end{matrix}\right\} = \frac{a + 2r \pm \sqrt{a^2 - 4ar - 4r^2}}{2}.$$

Discussion. — Pour que les valeurs trouvées soient acceptables, il faut :
1° qu'elles soient réelles ;
2° qu'elles soient toutes deux positives.

Ces conditions sont aussi suffisantes, car si elles sont remplies, les longueurs trouvées permettent de construire le triangle.

Il faut donc :

$$\Delta = (a + 2r)^2 - 8r(a + r) = a^2 - 4ar - 4r^2 \geqslant 0.$$

d'où $$\frac{a}{2}\left(-1 - \sqrt{2}\right) < r < \frac{a}{2}\left(-1 + \sqrt{2}\right)$$

et $$0 < b < c$$

ce qui exige $$af(0) = 2r(a + r) > 0$$

$$\frac{S}{2} - 0 > 0, \quad \frac{a + 2r}{2} > 0$$

a et r étant des longueurs, ces conditions sont toujours réalisées, d'autre part, r étant positif, la condition de réalité se réduit à

$$r < \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1).$$

Les deux valeurs trouvées pour b et c sont interchangeables car les relations qui y conduisent sont symétriques en b et c.

Construction géométrique. — Il est souvent intéressant de retrouver par la construction géométrique les résultats de la discussion algébrique.

Pour construire ce triangle, on remarquera que l'on a un double lieu du centre du cercle inscrit.

a) L'arc capable de $\frac{3\pi}{4}$ décrit sur l'hypoténuse.

En effet $$\widehat{OBC} = \frac{\widehat{B}}{2}, \quad \widehat{OCB} = \frac{\widehat{C}}{2}$$

d'où $$\widehat{BOC} = \pi - [\widehat{OBC} + \widehat{OCB}] = \pi - \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4};$$

b) la parallèle à BC à une distance égale à r.

Pour que le problème soit possible, il faut que la parallèle coupe l'arc, ce qui exige

$$r < IG.$$

Or,

$$IG = EG - EI = EB - EI$$
$$= \frac{BI}{\cos \pi/4} - BI \operatorname{tg} \pi/4$$
$$= \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{a}{2}$$
$$r < \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1).$$

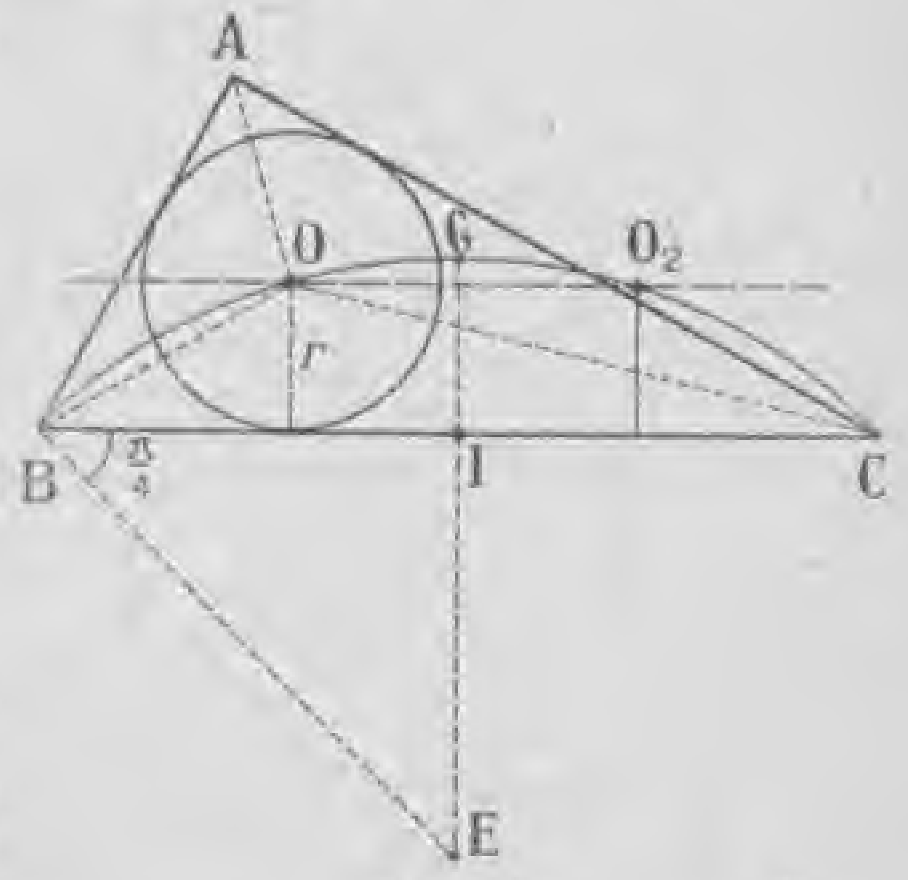


FIG. 52.

On retrouve la condition précédente.

Si elle est remplie, il y a deux points d'intersection auxquels correspondent deux triangles symétriques.

Si $r = a(\sqrt{2} - 1)$, la parallèle est tangente au cercle ; il n'y a qu'une solution correspondant à un triangle isocèle.

167. Exemple II. — *On donne un demi-cercle de rayon R limité par le diamètre AB. Soit M un point quelconque de AB et MC la demi-corde perpendiculaire sur AB.*

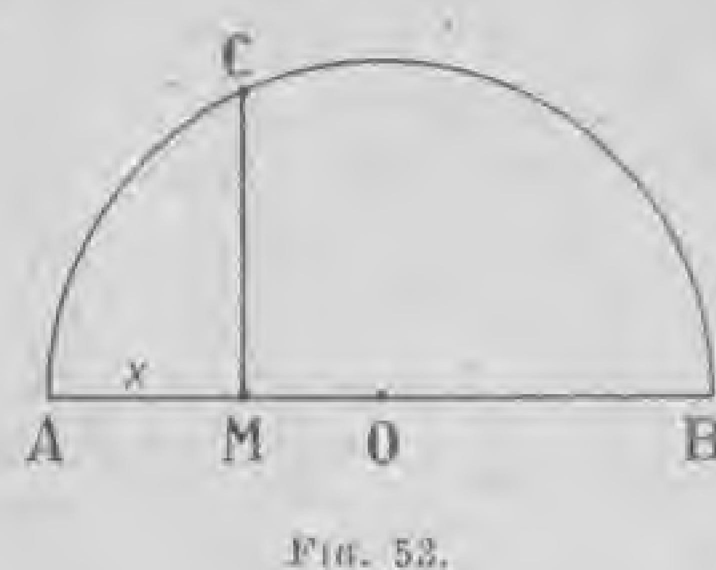


FIG. 52.

Déterminer $AM = x$ pour que l'on ait

$$\overline{AM}^2 + 4\overline{MC}^2 = K^2,$$

K étant une longueur donnée, discuter.

On doit avoir

(1) $\overline{AM}^2 + 4\overline{MC}^2 = K^2$.

Or, $\overline{MC}^2 = \overline{AM}.\overline{MB} = x(2R - x)$.

La relation (1) devient :

$$x^2 + 4x(2R - x) = K^2$$

d'où l'équation :

$$3x^2 - 8Rx + K^2 = 0$$

et :

$$x = \frac{4R \pm \sqrt{16R^2 - 3K^2}}{3}.$$

Discussion. — Les valeurs de x pour être acceptables doivent être réelles et comprises entre 0 et 2R, car le problème n'a de signification géométrique que si M est entre A et B.

On a $\Delta = 16R^2 - 3K^2 > 0$ pour $K < 4R\frac{\sqrt{3}}{3}$

$af(0) = 3K^2$ toujours > 0

$\frac{S}{2} - 0 = \frac{4R}{3}$ toujours > 0

$af(2R) = 3[K^2 - 4R^2] > 0$ pour $K > 2R$

$\frac{S}{2} - 2R = \frac{4R}{3} - 2R = \frac{-2R}{3}$ toujours négative.

D'où le tableau

K	Δ	$af(0)$	$\frac{S}{2} - 0$	$af(2R)$	$\frac{S}{2} - 2R$	
0						$x' = 0 \quad x'' = \frac{8R}{3}$
	+	+	+	—	—	$0 < x' < 2R < x''$
2R						$x' = \frac{2R}{3} \quad x'' = 2R$
	+	+	+	+	—	$0 < x' < x'' < 2R$
$4R\frac{\sqrt{3}}{3}$						$x' = x'' = \frac{4R}{3}$
	—	+	+	+	—	Pas de racines
$+\infty$						

Il y a donc une racine acceptable, la plus petite, pour :

$$0 < K < 2R$$

et deux racines acceptables pour : $2R < K < 4R\frac{\sqrt{3}}{3}$.

168. Exemple III. — *Par un point C d'un diamètre AB d'un cercle de rayon R, on mène une corde DE perpendiculaire à ce diamètre. Déterminer la position de ce point pour que l'on ait*

$$2AC + DE = 2l,$$

l étant une longueur donnée : Discuter.

Soit : $AC = x$.

On a (fig. 54) : $\overline{DC}^2 = AC \cdot CB = x(2R - x)$

d'où l'équation : $2x + 2\sqrt{x(2R - x)} = 2l$,

qui peut s'écrire : $\sqrt{x(2R - x)} = l - x$ (1)

Si $x < l$ (2)

on peut élever au carré ; et on a finalement l'équation :

$$(l - x)^2 = x(2R - x) \qquad (3)$$

ou $2x^2 - 2x(R + l) + l^2 = 0$

avec : $x = \frac{R + l \pm \sqrt{R^2 + 2Rl - l^2}}{2}$.

Discussion. — Pour que la valeur de x soit acceptable, il faut que x soit réel, compris entre 0 et 2R et qu'il satisfasse à la condition algébrique (2) $x < l$.

Il y aurait donc trois valeurs limites à examiner, mais l'équation (3) montre que si x admet des valeurs réelles, le produit $x(2R - x)$ est toujours positif comme égalant un carré parfait :

$$x(2R - x) > 0$$

ce qui entraîne : $0 < x < 2R$.

Il suffit donc d'examiner la position de x par rapport à l

$\Delta = R^2 + 2Rl - l^2 > 0$ pour $R(1 - \sqrt{2}) < l < R(1 + \sqrt{2})$,

$af(l) = l(l - 2R) > 0$ pour $l > 2R$

$\frac{S}{2} - l = \frac{R + l}{2} - l = \frac{R - l}{2} > 0$ pour $l < R$.

d'où le tableau :

l	Δ	$af(l)$	$\frac{S}{2} - l$	Conclusions
0				$x' = 0 \quad x'' = R$
	+	—	+	$x' < l < x''$
R				$x' = \frac{R(2 - \sqrt{2})}{2} \quad x'' = \frac{R(2 + \sqrt{2})}{2}$
	+	—	—	$x' < l < x''$
2R				$x' = R \quad x'' = 2R$
	+	+	—	$x' < x'' < l$
$R(1 + \sqrt{2})$				$x' = x'' = \frac{R(2 + \sqrt{2})}{2}$
	—	+	—	Pas de racines
$+\infty$				

On voit qu'il y a une racine acceptable pour $l < 2R$ et deux pour $2R < l < R(1 + \sqrt{2})$.

Construction géométrique :

Supposons le problème résolu et soit DE la corde répondant à la question.

Si nous rabattons la demi-corde CD en CF, nous devons avoir

$$2AC + DE = 2[AC + CD] = 2l$$

$$AC + CD = AC + CF = AF = l.$$

Le point F est donc connu. On en déduit un double lieu de D :

a) le demi-cercle de diamètre AB ;

b) la droite Δ menée par F et faisant un angle de 45° avec AB car le triangle CDF est rectangle isocèle.

Fig. 54.

Cette droite coupe le cercle en deux points si OH < R.

Or $$OH = OF\frac{\sqrt{2}}{2} = (l - R)\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Il faut $$(l - R)\frac{\sqrt{2}}{2} < R$$

ou $$l < R(\sqrt{2} + 1) ;$$

mais seuls conviennent les points d'intersection situés au-dessus de AB (les points en dessous correspondent à $l = (AC - CD)$.

Ils conviendront tous deux si $l > 2R$; un seul conviendra si $l < 2R$.

On retrouve bien les résultats de la discussion algébrique.

Lorsque $l = R(\sqrt{2} + 1)$, la droite Δ est tangente au cercle, ce qui correspond aux racines égales.

PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ

904. Déterminer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse a et le périmètre $2p$.

905. Déterminer les côtés d'un triangle rectangle, connaissant le périmètre $2p$ et sachant que ce triangle est équivalent à un carré de côté l. Discuter. Parmi tous les triangles de même périmètre, quel est celui qui a la plus grande surface ?

906. Déterminer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse a et le rapport k du r rayon du cercle inscrit dans ce triangle et du rayon r' du cercle exinscrit dans l'angle droit de ce triangle. Discuter.

907. Soit un cercle de rayon R. Quelle doit être la hauteur AD du triangle isocèle ABC (AB = AC) inscrit dans ce cercle, pour que l'on ait

$$3AD + 2BC = l ;$$

l désignant une longueur donnée.

908. On donne un triangle équilatéral ABC inscrit dans un cercle de rayon R. Mener une corde EF parallèle au côté BC et rencontrant en G et en H les côtés du triangle de telle manière que l'on ait

$$EF + GH = 2l,$$

l désignant une longueur donnée. Discuter.

909. On donne la base $BC = a$ et l'angle au sommet $A = 120°$ d'un triangle isocèle ABC ; on joint le point B à un point M du côté AC ; Déterminer ce point M de manière que l'on ait

$$\overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = l^2$$

l étant une longueur donnée.

910. On considère un demi-cercle de diamètre AOB = 2R ; O étant le centre du cercle. En B on mène la demi-droite Bz tangente à ce cercle et on porte sur Bz une longueur $BC = x$. Du point C on mène la seconde tangente au cercle. Elle coupe en D la perpendiculaire élevée sur AB en O.

1° Démontrer que OD = DC.

2° Calculer en fonction de x et de R le périmètre et la superficie du trapèze OBCD.

3° Déterminer x de manière que la superficie de ce trapèze soit égale à une superficie donnée k^2. Discussion.

N. B. — On distinguera deux cas de figure, suivant que l'on a $x > R$. ou $x < R$. (Rennes, 1930.)

911. On considère une pyramide de sommet A ayant pour base un trapèze BCQP dont les angles B et C sont droits. La face ABC est un triangle isocèle dont le plan est perpendiculaire à celui de la base.

On donne les côtés $AB = AC = a$ et la hauteur $AH = \frac{a}{2}$ du triangle ABC, et l'on pose $BP = x$, $CQ = y$.

1° Calculer BC et, en fonction de a, x et y, les longueurs AP, AQ et PQ ainsi que le volume V de la pyramide.

2° On suppose la face APQ *rectangle en* A. Montrer que $2xy = a^2$

Calculer x et y de manière que $V = \frac{ma^3\sqrt{3}}{2}$, m désignant un nombre positif donné. Discussion.

3° Évaluer V quand m a la plus petite valeur possible. Dire ce qu'est alors la base BCQP de la pyramide. (Aix-Marseille, 1932.)

912. On donne un tétraèdre dont les six arêtes ont la même longueur a.

1° En désignant par H le milieu de l'arête CD, montrer que le plan ABH est perpendiculaire à CD.

Quel est l'angle des deux directions AB et CD ?

2° On coupe le tétraèdre par le plan parallèle aux deux directions AB et CD mené par le point M de l'arête BC situé à la distance $BM = x$ du sommet B.

Évaluer en fonction de a et x l'aire S du quadrilatère de section et le volume V de la partie du tétraèdre comprise entre l'arête AB et le plan de section.

3° Déterminer x de telle sorte que le rapport du volume V à l'aire S ait une valeur donnée m.

Discuter l'équation obtenue et calculer x. (Nancy, 1930.)

913. On donne un tétraèdre régulier ABCD d'arête a. Sur CA et DA on porte $CE = DF = x$; de même sur CB et DB on porte $CG = DH = x$, $x < a$.

1° Démontrer que la quadrilatère EGHF est un rectangle.

2° Déterminer x pour que sa surface soit égale à k^2.

3° Lorsque $x = \frac{a}{3}$, calculer l'aire totale et le volume CDHFEG.

914. Une pyramide a pour base un carré ; la somme de l'apothème de cette pyramide et du côté de la base est égale à a ; enfin sa surface totale est m^2. Trouver le côté de la base et la hauteur de cette pyramide. Discussion. On appliquera les formules au cas où

$$a = 5 \text{ mètres} \quad \text{et} \quad m = 4 \text{ mètres}.$$

915. Soit M un point d'un demi-cercle de rayon R et soit P la projection orthogonale de M sur le diamètre AB :

1° On considère l'aire ABM qui est limitée par le diamètre AB, la corde BM, l'arc MA, et l'on fait tourner cette aire autour de AB. Exprimer le volume engendré en fonction de R et de la longueur $AP = x$.

2° Déterminer x de façon que ce volume soit égal à m fois le volume du cône engendré par le triangle rectangle APM tournant autour de AP, m étant un nombre positif donné. Discuter.

Construire la longueur de x qui correspond au minimum de m.

(Paris, 1931.)

916. Deux circonférences, de rayons R et r ($R > r$), sont situées dans un même plan et tangentes entre elles extérieurement au point I. On leur mène une tangente commune AA′ et on projette les points A et A′ en H et H′ sur le diamètre commun OO′.

1° Évaluer, en fonction de R et de r, les longueurs des segments AA′, OH, O′H′, AH, A′H′.

2° On fait tourner autour de OO′ la ligne formée de l'arc de cercle PA, du segment AA′, de l'arc de cercle A′Q. Cette ligne engendre une surface formée de deux calottes sphériques réunies par un tronc de cône de révolution. Évaluer l'aire de cette surface et montrer qu'elle est équivalente à la somme des aires des 2 sphères (P et Q sur OO′).

3° Déterminer le rapport des rayons $\frac{r}{R}$ de telle sorte que le rapport entre la somme des aires des deux calottes sphériques considérées et l'aire de la partie conique de la surface ait une valeur donnée positive k. — Discuter.

917. On considère un demi-cercle de diamètre AB, de centre O, de rayon égal à a. Une tangente CD à ce dernier cercle rencontre en C et D les tangentes menées aux extrémités A, B du diamètre. On désigne par I le point de contact de CD et du demi-cercle, par J la projection orthogonale de I sur AB. On mène les droites OC, OD, OI.

1° Soient x, y les mesures des longueurs AC, BD :

$$AC = x\,; \quad BD = y.$$

Quelles sont les mesures des longueurs CI et DI ? Montrer, en considérant les propriétés du triangle COD, par exemple, que les quantités x, y sont liées par la relation $\qquad xy = a^2.$

Déduire de là que si une droite CD rencontre les tangentes menées en A et B en des points C et D tels que le produit xy des longueurs AC, BD soit égal à a^2, cette droite est tangente au cercle donné.

Calculer les mesures des longueurs AJ, BJ, IJ, qui seront exprimées rationnellement en fonction de x et y.

2° En tournant autour du diamètre AB, le segment de droite CD engendre l'aire latérale d'un tronc de cône. Donner l'expression S de cette aire et déterminer x, y, sachant que l'on a $S = 4\pi m^2$. Discuter. En déduire le minimum de S lorsque l'on fait varier la tangente CD.

3° Évaluer :

a) le volume du tronc de cône engendré par la rotation de l'aire du trapèze ABCD autour du diamètre AB et l'excès E de ce volume sur le volume de la sphère engendrée dans la même rotation par l'aire du demi-cercle ;

b) la somme des volumes engendrés dans la rotation autour de AB par les aires des triangles ACJ, BDJ.

Comparer les résultats obtenus. (Montpellier, 1932.)

918. AA′ et BB′ étant deux droites parallèles, AB la perpendiculaire commune ($AB = 2a$), on considère un angle droit de sommet O, milieu de AB, et dont les côtés coupent respectivement les deux parallèles en M et N. On pose $\qquad AM = x, \quad BN = y, \quad MN = z.$

1° Établir les relations $\qquad xy = a^2, \quad x + y = z.$

2° Calculer le volume V du tronc de cône engendré par la révolution du trapèze MABN autour de AB, son aire latérale s et son aire totale S, ainsi que le volume v engendré par le triangle OMN en tournant autour de AB.

Relations entre S et V, s et v.

3° Déterminer z de façon que $\frac{V}{v} = m$. Entre quelles limites doit se trouver m pour que cette condition puisse être réalisée ? Quelles sont les valeurs de x, y, z qui correspondent à la plus petite valeur possible de m ?

4° Démontrer que le tronc de cône engendré par la révolution du trapèze MABN autour de AB est circonscrit à la sphère de diamètre AB.

(Martinique, 1931.)

919. On considère une circonférence (C) de centre O et de rayon x et un point A extérieur tel que la longueur OA soit égale à a : on désigne par M le point de contact de l'une des tangentes menées de A à (C), par H la projection orthogonale de M sur OA et par P le point de rencontre compris entre O et A de (C) avec OA.

1° Calculer en fonction de a et de x les longueurs AM, OH, AH, MH, AP et PH.

2° La figure tournant autour de OA supposée fixe, calculer en fonction de a et de x les aires engendrées par le segment de droite AM et l'arc de cercle MP ainsi que les volumes engendrés par le triangle mixtiligne AMP ayant pour côtés les deux segments de droites AM, AP et l'arc de cercle MP, et par le triangle mixtiligne MHP ayant pour côtés les deux segments de droite, MH, HP et l'arc de cercle MP.

3° Déterminer le rayon x de la circonférence de façon que l'on ait :

$$\overline{AM}^2 + m\overline{AP}^2 = 5ma^2,$$

où m désigne un nombre donné positif ou négatif. Discuter.

(Lyon, 1932.)

920. 1° Pour quelles valeurs de λ l'équation

$$(\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda - 2)x + \lambda - 4 = 0$$

a-t-elle deux racines positives ?

2° Quand il en est ainsi, on désigne ces racines par x' et x'' et on considère le rectangle ABCD qui a pour côtés

$$AB = CD = x', \quad BC = DA = x''.$$

On fait tourner ce rectangle successivement autour des côtés AB et BC. Calculer en fonction de λ la somme des volumes ainsi engendrés.

3° Déterminer λ de manière que cette somme ait une valeur donnée $2\pi m$. Discuter. (Rennes, 1931.)

921. On considère une demi-circonférence de diamètre $AB = 2n$. Déterminer sur cette demi-circonférence un point M qui se projette en P sur AB et tel que

$$AP + PM = l.$$

l étant une longueur donnée. Discuter.

922. On donne un angle $xOy = 60°$ et un point A sur Ox tel que $OA = a$. Déterminer sur Oy un point M tel que

$$MO + MA = l$$

l désignant une longueur donnée. Discuter.

CHAPITRE XI

VARIATION DE LA FONCTION DU SECOND DEGRÉ

169. ***La fonction du second degré est de la forme***

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

où x est la variable indépendante, a, b et c des coefficients numériques, a étant différent de zéro.

Cette fonction est définie pour toute valeur de x.

170. Continuité. — (n° 78). Donnons à x un certain accroissement h, y prend un accroissement k tel que :

$$y + k = a(x + h)^2 + b(x + h) + c \qquad (2)$$

En retranchant (1) de (2), il vient :

$$k = 2axh + ah^2 + bh$$
$$= h(2ax + b + ah).$$

Quand h tend vers zéro, l'expression entre parenthèses garde une valeur finie quel que soit x, et k tend vers zéro en même temps que h.

La fonction est donc continue pour toutes les valeurs de x.

171. Sens de variation de la fonction.

Soient x_1 et x_2 deux valeurs de x, y_1 et y_2 les valeurs correspondantes de y.

D'après les définitions données (n° 79), la fonction y sera croissante entre x_1 et x_2 si le rapport $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ est positif ; elle sera décroissante dans le cas contraire :

Or : $$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c$$
$$y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c$$

D'où : $$y_2 - y_1 = ax_2^2 - ax_1^2 + bx_2 - bx_1$$
$$= (x_2 - x_1)[a(x_2 + x_1) + b]$$

et $$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1) + b.$$

Distinguons maintenant deux hypothèses suivant que a *est positif ou négatif.*

1° **a > 0.** Partageons l'intervalle de variation de x en deux parties $x < -\frac{b}{2a}$ et $x > -\frac{b}{2a}$.

Si l'on prend les deux valeurs x_1 et x_2 de x toutes deux inférieures à $-\frac{b}{2a}$,

$$x_1 + x_2 < -\frac{b}{a}.$$

a étant positif : $a(x_1 + x_2) < -b$

et : $a(x_1 + x_2) + b < 0.$

Le rapport $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ est < 0 *et la fonction* y *est* **décroissante** *lorsque* x *varie de* $-\infty$ *à* $-\frac{b}{2a}$.

Si, au contraire, on prend les deux valeurs x_1 et x_2 supérieures à $-\frac{b}{2a}$

$$x_1 + x_2 > -\frac{b}{a}$$

a étant > 0 $a(x_1 + x_2) > -b$

$$a(x_1 + x_2) + b > 0.$$

Le rapport $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ *est* > 0 *et la fonction* y *est* **croissante** *lorsque* x *varie de* $-\frac{b}{2a}$ à $+\infty$.

Lorsque le coefficient du premier terme est positif, la fonction $y = ax^2 + bx + c$ est décroissante lorsque x varie de $-\infty$ à $-\frac{b}{2a}$; croissante, lorsque x varie de $-\frac{b}{2a}$ à $+\infty$.

Pour $x = -\frac{b}{2a}$, la fonction cessant de décroître pour croître, passe par un minimum.

La valeur de ce minimum s'obtient en remplaçant x par $-\frac{b}{2a}$ dans y ; on trouve :

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

2° **a < 0.** On partage de même l'intervalle de variation de x en deux parties par la valeur $-\frac{b}{2a}$.

Si les deux valeurs x_1 et x_2 sont toutes deux inférieures à $-\frac{b}{2a}$

$$x_1 + x_2 < -\frac{b}{a}$$

a étant négatif :

$$a(x_1 + x_2) > -b$$

et : $a(x_1 + x_2) + b > 0$

Le rapport $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ *étant positif, la fonction* y *est alors* **croissante.**

Si, au contraire, les valeurs x_1 et x_2 sont toutes deux supérieures à $-\frac{b}{2a}$,

$$x_1 + x_2 > -\frac{b}{a}$$

$$a(x_1 + x_2) < -b$$

et : $a(x_1 + x_2) + b < 0.$

Le rapport $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ *est négatif, et* y **est décroissant** *dans l'intervalle* $-\frac{b}{2a}$, $+\infty$.

Lorsque le coefficient du premier terme est négatif, la fonction

$$y = ax^2 + bx + c$$

est croissante lorsque x varie de $-\infty$ à $-\frac{b}{2a}$; décroissante lorsque x varie de $-\frac{b}{2a}$ à $+\infty$.

Pour $x = -\frac{b}{2a}$, la fonction cessant de croître pour décroître, passe par un maximum qui est égal à :

$$\frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Ces résultats peuvent se résumer dans l'un ou l'autre des tableaux suivants :

$a > 0$	x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
	y	$+\infty$	↘	$\frac{4ac - b^2}{4a}$	↗	$+\infty$

$a < 0$	x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
	y	$-\infty$	↗	$\frac{4ac - b^2}{4a}$	↘	$-$ 8

Valeurs remarquables.

Si le trinôme admet des racines x' et x'', y s'annule pour ces valeurs.

Pour $x = 0$, $y = c$.

172. Graphique. — La connaissance du sens de variation de la fonction et des points remarquables permet de construire le graphique de la fonction.

1° **a > 0.** Si **4ac — b²** est > 0, le minimum est **positif**, le point

$$A_1\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

est situé au-dessus de l'axe Ox, la courbe ne coupe pas cet axe et occupe la position I.

Si 4ac — b² = 0, le **minimum est nul**, le point

$$A_2\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

est sur l'axe Ox, la courbe occupe la position II.

Si 4ac — b² < 0, le minimum est négatif, le point A_3 est en dessous de l'axe Ox, la courbe occupe la position III.

Fig. 55.

2° **a < 0. Si 4ac—b² > 0,** le **maximum** $\frac{4ac-b^2}{4a}$ **est négatif,** le point A'_1 est situé en dessous de l'axe Ox, la courbe est située tout entière en dessous de cet axe et occupe la position I'.

Si 4ac — b² = 0, le **maximum est nul,** le point A'_2 est sur l'axe Ox la courbe occupe la position II'.

Si 4ac — b² < 0, le maximum est positif, le point A_3 est au-dessus de l'axe Ox, la courbe occupe la position III'.

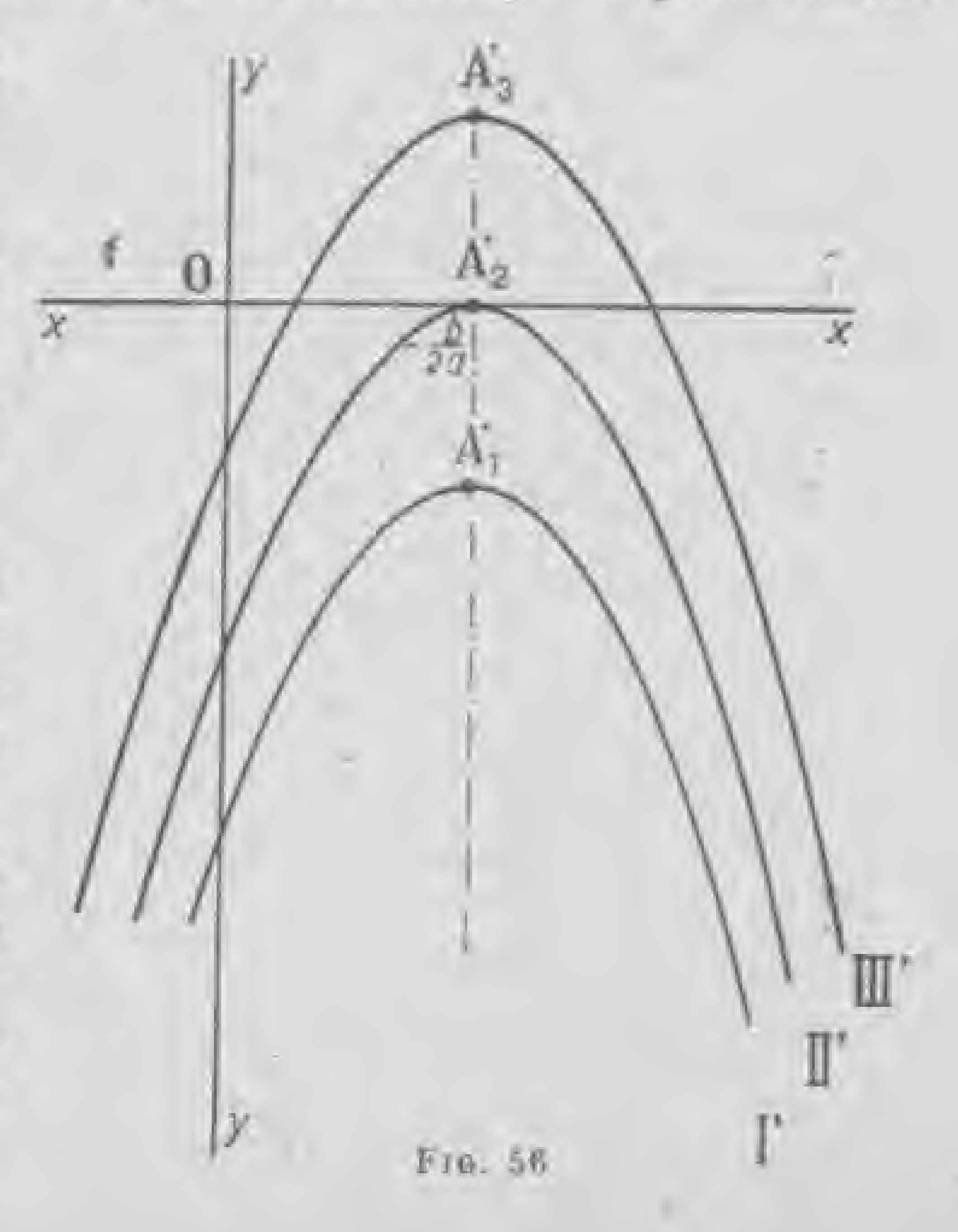


Fig. 56

Remarque. — La disposition de ces courbes permet de retrouver graphiquement les résultats de la discussion de l'équation du second degré et de l'étude du signe du trinôme.

Supposons **a > 0. Si** $\frac{4ac-b^2}{4a} > 0$ ou $b^2 - 4ac < 0$, la courbe occupe la position I et est située tout entière au-dessus de l'axe Ox. Le trinôme ne s'annule pour aucune valeur de x et reste constamment positif, c'est-à-dire du signe de son premier terme ; c'est le cas où le discriminant est négatif.

Si $\frac{4ac-b^2}{4a} = 0$, $b^2 - 4ac = 0$, la courbe occupe la position II et coupe l'axe Ox en deux points confondus ; elle reste au-dessus de l'axe Ox. Le trinôme admet deux racines égales de valeur $-\frac{b}{2a}$ et pour toute autre valeur de x reste du signe de son premier terme.

Si $\frac{4ac-b^2}{4a} < 0$, $b^2 - 4ac > 0$, la courbe occupe la position III ; elle coupe l'axe Ox en deux points et reste au-dessus de l'axe sauf pour les valeurs de x comprises entre ces deux points : le trinôme admet deux racines distinctes ; il est du signe de son premier terme sauf pour les valeurs de x comprises entre les racines.

On ferait un raisonnement analogue dans le cas de $a < 0$.

173. Symétrie. — L'étude du trinôme du second degré a permis de l'écrire sous la forme canonique :

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

Soient deux points M_1 et M_2 de la courbe d'abscisses respectives :

$$\overline{OP_1} = x_1 = -\frac{b}{2a} + h$$

$$\overline{OP_2} = x_2 = -\frac{b}{2a} - h.$$

Leurs ordonnées sont :

$$y_1 = \overline{P_1M_1}$$
$$= a\left[\left(-\frac{b}{2a} + h + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$
$$= ah^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$$

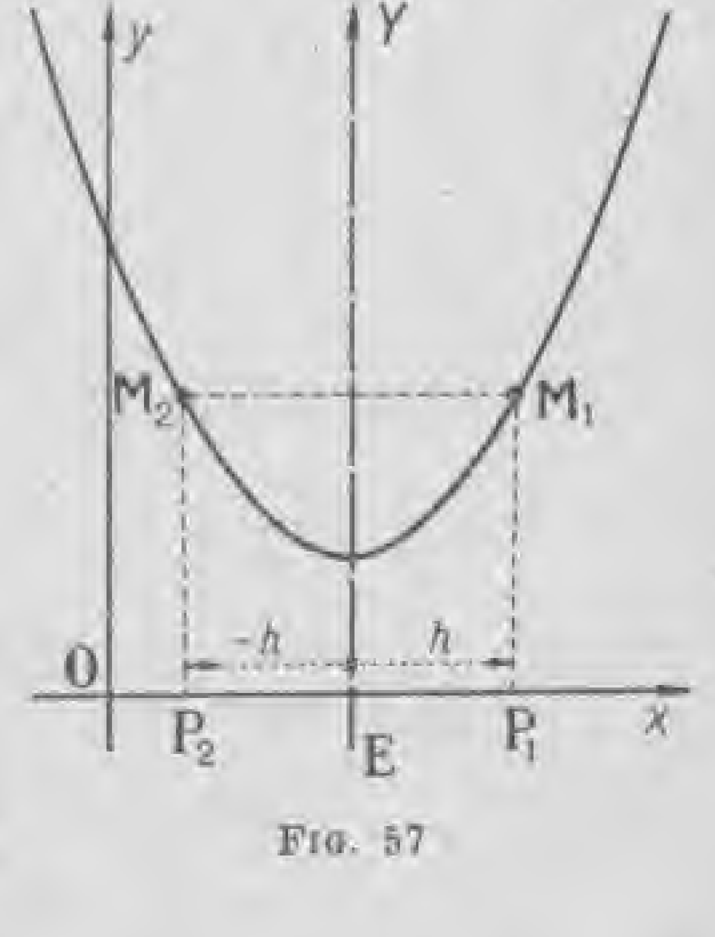


Fig. 57

et $y_2 = \overline{P_2M_2}$

$$= a\left[\left(-\frac{b}{2a} - h + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] = ah^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

On a donc : $\overline{P_1M_1} = \overline{P_2M_2}$.

La droite M_1M_2 est parallèle à l'axe Ox et perpendiculaire à la droite :

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Les points M_1 et M_2 sont équidistants de cette droite et sont symétriques par rapport à cette droite.

Cette propriété étant vérifiée quel que soit b, la courbe admet la parallèle à Oy d'équation $x = -\frac{b}{2a}$ ***comme axe de symétrie.***

Le point de rencontre de l'axe de symétrie avec la courbe, point qui correspond au maximum (ou au minimum), est dit le sommet de la courbe.

174. Équation réduite. — Si l'on prend pour nouveaux axes de coordonnées les parallèles aux axes menées par le sommet de la courbe, il est possible de donner à l'équation de la courbe une forme plus simple.

Fig. 58.

Les coordonnées d'un point M par rapport aux deux systèmes sont respectivement :

$$\overline{OP} = x \qquad \overline{PM} = y,$$
$$\overline{AP_1} = X \qquad \overline{P_1M} = Y.$$

D'autre part, on a :

$$\overline{OE} = -\frac{b}{2a}$$

et $$\overline{EA} = \overline{OI} = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

On peut écrire $x = \overline{OP} = \overline{OE} + \overline{EP} = \overline{OE} + \overline{AP_1} = -\frac{b}{2a} + X$

$$y = \overline{PM} = \overline{PP_1} + \overline{P_1M} = \overline{OI} + \overline{P_1M} = \frac{4ac - b^2}{4a} + Y.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans le trinôme mis sous la forme canonique, on aura :

$$\frac{4ac - b^2}{4a} + Y = a\left[\left(-\frac{b}{2a} + X + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

ou $$Y = aX^2.$$

Cette forme réduite montre que la courbe représentative d'un trinôme du second degré est une parabole.

Remarque. — Cette forme réduite met immédiatement en évidence la symétrie.

En effet, à deux valeurs opposées de X correspondent la même valeur de Y et sur la courbe, deux points symétriques par rapport à OY.

175. MARCHE A SUIVRE POUR L'ÉTUDE DE LA VARIATION D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE DU SECOND DEGRÉ.

a) **Continuité de la fonction.**

b) **Sens de variation.** — *On cherche le signe du rapport* $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ *suivant les valeurs attribuées à* x *dans l'un ou l'autre des intervalles démontrés* $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ *et* $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

c) **Recherche des points remarquables :** *minimum* (*ou maximum*) *point de rencontre avec l'axe Oy* (x = 0, y = c) *point de rencontre avec l'axe Ox, donnés par les racines* (*si elles existent*).

d) **Construction soignée du graphique** *en observant autant que possible l'échelle des valeurs.*

e) **Étude de la symétrie de la courbe et de son équation réduite.**

176. EXEMPLE D'ÉTUDE D'UNE FONCTION DU SECOND DEGRÉ.

Soit à étudier la fonction $y = -2x^2 - 6x + 8$.

Continuité. — Cette fonction est définie quel que soit x. Si l'on donne à x l'accroissement h, y prend l'accroissement k de telle sorte que :

$$y + k = -2(x + h)^2 - 6(x + h) + 8$$

et : $$k = -4xh - 2h^2 - 6h = h(-4x - 6 - 2h).$$

Si h tend vers zéro, l'expression entre parenthèses restant finie quel que soit h, k tend aussi vers zéro.

La fonction y est donc continue pour toute valeur de x.

Sens de variation. — A deux valeurs de x, x_1 et x_2 correspondent les valeurs de y :

$$y_1 = -2x_1^2 - 6x_1 + 8$$
$$y_2 = -2x_2^2 - 6x_2 + 8,$$

d'où $$y_2 - y_1 = -2(x_2^2 - x_1^2) - 6(x_2 - x_1)$$
$$= (x_2 - x_1)[-2(x_2 + x_1) - 6]$$

et $$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -2(x_1 + x_2) - 6.$$

Si les deux valeurs de x, x_1 et x_2 sont prises dans l'intervalle $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$.

$$x_1 + x_2 < -3$$

et $$2(x_1 + x_2) < -6,$$

d'où $$-2(x_1 + x_2) - 6 > 0.$$

Le rapport $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ étant positif lorsque x varie de $-\infty$ à $-\frac{3}{2}$ la fonction y est croissante dans cet intervalle.

Si les deux valeurs de x, x_1 et x_2 sont prises dans l'intervalle $\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$,

$$x_1 + x_2 > -3$$
$$-2(x_1 + x_2) - 6 < 0.$$

Le rapport $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ étant négatif lorsque x varie de $-\frac{3}{2}$ à $+\infty$, la fonction y est décroissante dans cet intervalle.

Points remarquables. — Pour $x = -\frac{3}{2}$ la fonction cesse de croître pour décroître, elle passe donc par un maximum

$$y = \frac{25}{2}.$$

Pour $x = 0$, $y = 8$.

Pour $x = +1$ et $x = -4$, $y = 0$.

On obtient donc le graphique ci-contre.

Symétrie. — L'équation de la courbe peut s'écrire :

$$y = -2[x^2 + 3x - 4]$$
$$= -2\left[\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right].$$

Si l'on prend deux points M_1 et M_2 d'abscisses respectives $x_1 = -\frac{3}{2} + h$ et $x_2 = -\frac{3}{2} - h$ leurs ordonnées y_2 et y_1 sont toutes deux égales à

$$y_1 = y_2 = -2\left[h^2 - \frac{25}{4}\right].$$

Les points M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à la droite $x = -\frac{3}{2}$ qui est axe de symétrie de la courbe.

Fig. 59.

Équation réduite. — Si l'on prend pour nouveaux axes de coordonnées, les parallèles à Ox et Oy menées par le sommet de la courbe, on a comme nouvelles coordonnées d'un point M de la courbe :

$$\overline{AE'} = X, \quad \overline{E'M_1} = Y.$$

Or :

$$x = \overline{OP_1} = \overline{OE} + \overline{EP_1} = \overline{OE} + \overline{AE'} = -\frac{3}{2} + X$$

$$y = \overline{P_1M_1} = \overline{P_1E'} + \overline{E'M_1} = \overline{EA} + \overline{E'M_1} = \frac{25}{2} + Y$$

d'où : $y = \frac{25}{2} + Y = -2\left[\left(-\frac{3}{2} + X + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right]$

$$Y = -2X^2,$$

équation qui met immédiatement en évidence la symétrie et la nature parabolique de la courbe.

VARIATIONS DE LA FONCTION DU SECOND DEGRÉ

Étudier la variation des fonctions suivantes :

923. $y = x^2 - 8x + 12.$

924. $y = 4x^2 - 5x + 4.$

925. $y = 9x^2 - 6x + 1.$

926. $y = -3x^2 + 7x - 1.$

927. $y = (x - 5/2)^2 - 4/9.$

928. $y = -2x^2 + 4x - 5.$

929. Étudier la variation de la fonction
$$y = 2x^2 - 3x + 1$$
établir l'existence de son axe de symétrie.

Déterminer les coefficients du trinôme du second degré
$$y = ax^2 + bx + c$$
de telle manière qu'il satisfasse aux conditions indiquées et étudier ensuite sa variation.

930. $f(0) = 1$; $f(-1) = 3$; $f(1) = 4.$

931. Le trinôme doit s'annuler pour $x = 8$ et avoir un minimum égal à -12 pour $x = 6$.

932. $f(-2) = 13$; $f(1) = -17$
et le trinôme doit prendre la même valeur pour $x = 1/2$ et $x = 7/2$.

933. Quelle valeur faut-il donner à m pour que le trinôme
$$y = mx^2 - (m^2 - 6)x + m^2 - 1$$
soit minimum pour $x = 5/2$?

934. Quelle valeur faut-il donner à m pour que le trinôme
$$y = mx^2 - (3m - 1)x + m - 1$$
ait un minimum égal à $10/3$.

935. Déterminer a de telle sorte que la somme des carrés des racines de l'équation
$$x^2 + (2 - a)x - a - 3 = 0$$
soit minimum ?

936. Déterminer m pour que la différence des racines de l'équation
$$x^2 - 2(3m - 1)x + m^2 - 1 = 0$$
soit minimum ?

937. Étudier la variation de la fonction
$$y = mx^2 - 4x + m + 3$$
et étudier d'après les différents graphiques obtenus suivant les valeurs de m, le signe de ce trinôme.

938. On donne le trinôme

$$y = (m + 2)x^2 - (2m + 3)x - (2m + 1).$$

1° Déterminer m de telle sorte que la somme des inverses des racines de ce trinôme soit égale à $-11/10$ et achever la résolution.

2° Tracer la courbe représentative de la fonction ainsi obtenue.

3° Trouver son équation réduite et son axe de symétrie. A quelle courbe simple peut-on la ramener par une translation convenablement choisie ?

939. On donne l'équation

$$(m + 2)x^2 - (m + 4)x + 2 - m = 0.$$

1° Pour quelles valeurs de m admet-elle des racines ?

2° On donne la fonction $y = 5m^2 + 8m$ dans laquelle m désigne la variable indépendante ; variation et représentation graphique de cette fonction.

Montrer que la courbe ainsi construite donne la solution du 1°.

Comment peut-on déduire simplement de la courbe ainsi tracée les courbes représentatives des fonctions

$$y = 5m^2 - 8m;$$
$$y = -5m^2 - 8m;$$
$$y = -5m^2 + 8m.$$

Montrer qu'il existe entre les racines de l'équation proposée une relation indépendante de m.

940. Étant donnée une droite AB de longueur a, déterminer sur cette droite ou sur son prolongement un point M tel que la somme des aires des triangles équilatéraux construits sur MA et MB soit minimum.

941. Dans un triangle équilatéral dont le côté est a, inscrire un triangle équilatéral de surface minimum.

942. Partager la ligne AB en deux parties AC et BC telles qu'en construisant sur la première un triangle équilatéral ACD et sur la seconde un carré CBEF, puis joignant DF, la surface du pentagone ABEFD soit la plus petite possible. (Bacc.)

943. On donne un segment $AB = a$ et un point C sur ce segment, et l'on construit deux sphères ayant pour diamètres les deux segments AC et BC. On demande d'évaluer le minimum de la somme des volumes de ces deux sphères quand le point C se déplace de A en B.

944. Dans une sphère de rayon donné R, on inscrit un cône équilatéral ; mener un plan parallèle à la base, tel que la somme des sections faites dans la sphère et dans le cône soit maximum.

945. Soient ABC un triangle, AH une de ses hauteurs ; $BC = a$, $AH = h$. On prend entre A et H un point M tel que $AM = x$, et on mène par M une parallèle à BC qui coupe AB en B' et AC en C'. Enfin, on abaisse de B' en C' les perpendiculaires B'B" et C'C" sur BC.

1° Calculer les longueurs des côtés, le périmètre et l'aire du rectangle B'C'B"C". Comment varient le périmètre et l'aire quand x varie de 0 à h ?

2° Ce rectangle, en tournant autour de BC, engendre un cylindre ; calculer sa surface latérale et sa surface totale S. Chercher pour quelles valeurs du rapport $\frac{h}{a}$ cette surface totale va d'abord en croissant quand x croît de 0 à h. Étudier ses variations lorsque $h = 1$, $a = 3$.

3° Déterminer x de telle sorte que le triangle AB'C' et le rectangle B'C'B"C" engendrent en tournant autour de BC des volumes équivalents.

946. Une sphère de rayon R repose sur un plan P. Un cône de révolution a pour rayon de base le rayon de la sphère et pour hauteur h. Ce cône repose par sa base sur le plan P.

On coupe les deux solides par un même plan Q parallèle à P ; on désigne par x la distance des deux plans.

1° Exprimer en fonction de h, R et x la somme des aires des sections obtenues dans les deux solides. Examiner si la formule convient encore lorsque x est supérieur à h.

2° Étudier la variation de cette somme quand x varie. Examiner les différents cas.

Quelle relation doivent vérifier h et R pour que la somme des aires soit indépendante de x ? (Alger, 1932.)

947. On donne un tétraèdre régulier SABC d'arête a. On mène par le sommet S un plan parallèle à BC qui coupe le tétraèdre suivant le triangle SMN. On pose $AM = x$.

1° Exprimer en fonction de a et de x la somme y des carrés des arêtes du tétraèdre SAMN.

2° Étudier la variation de cette somme quand x varie ; la représenter par une courbe quand $a = 1$.

3° Volume du tétraèdre SAMN quand la somme précédente est minimum.

4° Trouver x de manière que le périmètre du triangle SMN soit égal à $\frac{11a}{5}$. Montrer que ce problème a toujours une solution et une seule.

CHAPITRE XII

VARIATION DE LA FONCTION HOMOGRAPHIQUE

177. ***La fonction homographique est une fonction de la forme***

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$$

où x est la variable indépendante, a, b, a', b' étant des coefficients numériques avec $a' \neq 0$.

(Si $a' = 0$, la fonction se réduit à une fonction linéaire.)

Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x *sauf pour* $x = -\frac{b'}{a'}$; pour cette valeur, en effet, le dénominateur s'annule, la fonction cesse d'être définie.

178. **Continuité de la fonction.** — Si l'on donne à x un accroissement h, y prend un accroissement k, tel que :

$$y + k = \frac{a(x+h) + b}{a'(x+h) + b'}$$

et
$$k = \frac{a(x+h) + b}{a'(x+h) + b'} - \frac{ax + b}{a'x + b'}.$$

Si $x \neq -\frac{b'}{a'}$, $a'x + b'$ n'est pas nul, on peut choisir h assez petit pour que $a'(x+h) + b'$ soit aussi différent de zéro, et l'on peut écrire :

$$k = \frac{[a(x+h) + b]\,(a'x + b') - [a'(x+h) + b']\,(ax + b)}{(a'x + b')\,[a'(x+h) + b']}$$

ou, en simplifiant :

$$k = \frac{h[ab' - a'b]}{(a'x + b')\,[a'(x+h) + b']},$$

Si, comme il a été supposé, $x \neq -\frac{b'}{a'}$

la quantité $\frac{ab' - a'b}{(a'x + b')\,[a'(x+h) + b']}$

reste finie. k tend donc vers zéro quand h tend vers zéro.

Pour $x = -\frac{b'}{a'}$, k est infiment grand par rapport à h et ne tend plus vers zéro avec h.

La fonction homographique est donc continue, sauf pour $x = -\frac{b'}{a'}$,

x *pourra donc varier de* $-\infty$ *à* $-\frac{b'}{a'} - \varepsilon$, *et de* $-\frac{b'}{a'} + \varepsilon$ à $+\infty$, ε *étant une quantité positive aussi petite que l'on veut.*

179. **Sens de variation.** — Soient x_1 et x_2 deux valeurs quelconques de x, y_1 et y_2 les valeurs correspondantes de y.

$$y_1 = \frac{ax_1 + b}{a'x_1 + b'}, \qquad y_2 = \frac{ax_2 + b}{a'x_2 + b'}.$$

$$y_2 - y_1 = \frac{ax_2 + b}{a'x_2 + b'} - \frac{ax_1 + b}{a'x_1 + b'}$$

$$= \frac{(ab' - a'b)\,(x_2 - x_1)}{(a'x_2 + b')\,(a'x_1 + b')};$$

et
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ab' - a'b}{(a'x_2 + b')\,(a'x_1 + b')}.$$

Si l'on prend les deux valeurs x_1 et x_2 dans l'intervalle

$$-\infty, -\frac{b'}{a'} - \varepsilon$$

les deux expressions $a'x_1 + b'$ et $a'x_2 + b'$ seront du même signe (positives si $a' < 0$, négatives pour $a' > 0$), leur produit sera donc positif *et le rapport* $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ *sera du signe de* $ab' - a'b$.

De même, si l'on prend les deux valeurs x_1 et x_2 dans l'intervalle $-\frac{b'}{a'} + \varepsilon, +\infty$.

les deux expressions $a'x_1 + b'$ et $a'x_2 + b'$ seront encore de même signe *et le rapport* $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ *sera encore du signe de* $ab' - a'b$.

Lorsque x *varie dans l'un des intervalles où la fonction homographique est définie et continue, le rapport* $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ *garde un signe constant qui est celui de* $ab' - a'b$.

La fonction $y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$ est donc ;

constamment croissante si $ab' - a'b$ est positif,
constamment décroissante, si $ab' - a'b$ est négatif.

Remarque. — Si $ab' - a'b = 0$, le rapport $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ est nul et comme $x_2 \neq x_1$, il faut $y_2 = y_1$; la fonction y est constante.

Valeurs remarquables.

Lorsque $x = 0$, $y = \dfrac{b}{b'}$; le point correspondant est situé sur l'axe Oy.

Lorsque $x = -\dfrac{b}{a}$, $y = 0$; le point correspondant est situé sur l'axe Ox.

180. Graphique.

Lorsque x tend vers $-\dfrac{b'}{a'}$, $\left(x = -\dfrac{b'}{a'} \pm \varepsilon\right)$ le dénominateur devient infiniment petit ; la fraction y dont le numérateur garde une valeur finie, augmente en valeur absolue au delà de toute limite, elle devient infinie.

Fig. 60.

Dans la représentation graphique, lorsque le point P se rapproche du point E tel que $OE = -\dfrac{b'}{a'}$, *le point M ayant une ordonnée qui croît en valeur absolue au delà de toute limite s'éloigne indéfiniment.* **La branche de courbe se rapproche indéfiniment de la droite $x = -\dfrac{b'}{a'}$; on dit que cette droite est asymptote à la courbe.**

Si $ab' - a'b \neq 0$, ou $\dfrac{b'}{a'} \neq \dfrac{b}{a}$, il est possible de déterminer de part et d'autre de $-\dfrac{b'}{a'}$ un intervalle de variation tel que $ax + b$ garde un signe constant dans cet intervalle ; supposons-le positif pour fixer les idées, et supposons aussi a' positif.

Lorsque x tend vers $-\dfrac{b'}{a'}$ par valeurs inférieures, $x = -\dfrac{b'}{a'} - \varepsilon$, le dénominateur est infiniment petit négatif et y devient infiniment grand en valeur absolue, mais reste négatif ; il tend vers $-\infty$,

Si, au contraire, x tend vers $-\dfrac{b'}{a'}$ par valeurs supérieures $\left(x = -\dfrac{b'}{a'} + \varepsilon\right)$ le dénominateur est un infiniment petit positif, y croît au delà de toute limite et tend vers $+\infty$.

Un raisonnement analogue permet de constater un changement de signe semblable dans le cas où $a' < 0$ et $ax + b < 0$.

En résumé, *lorsque x tend vers $-\dfrac{b'}{a'}$, y augmente indéfiniment en valeur absolue, mais avec un signe différent suivant que x tend vers $-\dfrac{b'}{a'}$ par valeurs inférieures ou par valeurs supérieures à $-\dfrac{b'}{a'}$.*

On peut écrire si $x \neq 0$,

$$y = \frac{a + \dfrac{b}{x}}{a' + \dfrac{b'}{x}}.$$

Lorsque x augmente indéfiniment en valeur absolue, $\dfrac{b}{x}$ et $\dfrac{b'}{x}$ tendent vers zéro et on a :

$$\lim_{x=\infty} y = \frac{a}{a'}.$$

Considérons la courbe C représentative de la fonction y et la droite D parallèle à Ox d'équation

$$y = \frac{a}{a'}.$$

Soient M et N deux points de même abscisse $\overline{OP} = x$ de la courbe C et de la droite D.

La distance $\overline{NM}$ des deux points est donnée par :

$$\overline{NM} = \overline{PM} - \overline{PN} = \frac{ax + b}{a'x + b'} - \frac{a}{a'} = \frac{a'b - ab'}{a'(a'x + b')}.$$

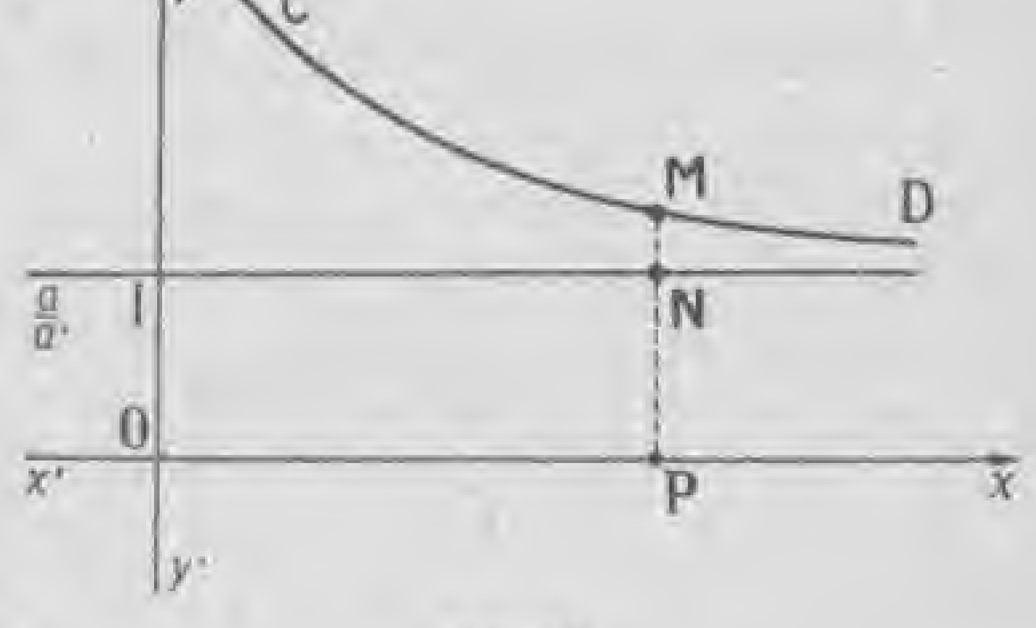


Fig. 61.

Lorsque x augmente indéfiniment, le numérateur de la fraction reste constant tandis que le dénominateur augmente indéfiniment en valeur absolue ; la fraction tend vers zéro.

Le point M se rapproche indéfiniment de la droite D, la droite est asymptote à la courbe.

La courbe représentative de la fonction homographique admet donc deux asymptotes, l'une parallèle à l'axe Oy

d'équation $x = -\dfrac{b'}{a'}$ ***et l'autre parallèle à l'axe Ox d'équation*** $y = \dfrac{a}{a'}$.

Connaissant le sens de variation et les asymptotes on peut tracer la courbe représentative.

Elle présentera l'une des deux formes suivantes selon que $ab' - a'b$ est positif (courbe I) ou négatif (courbe II).

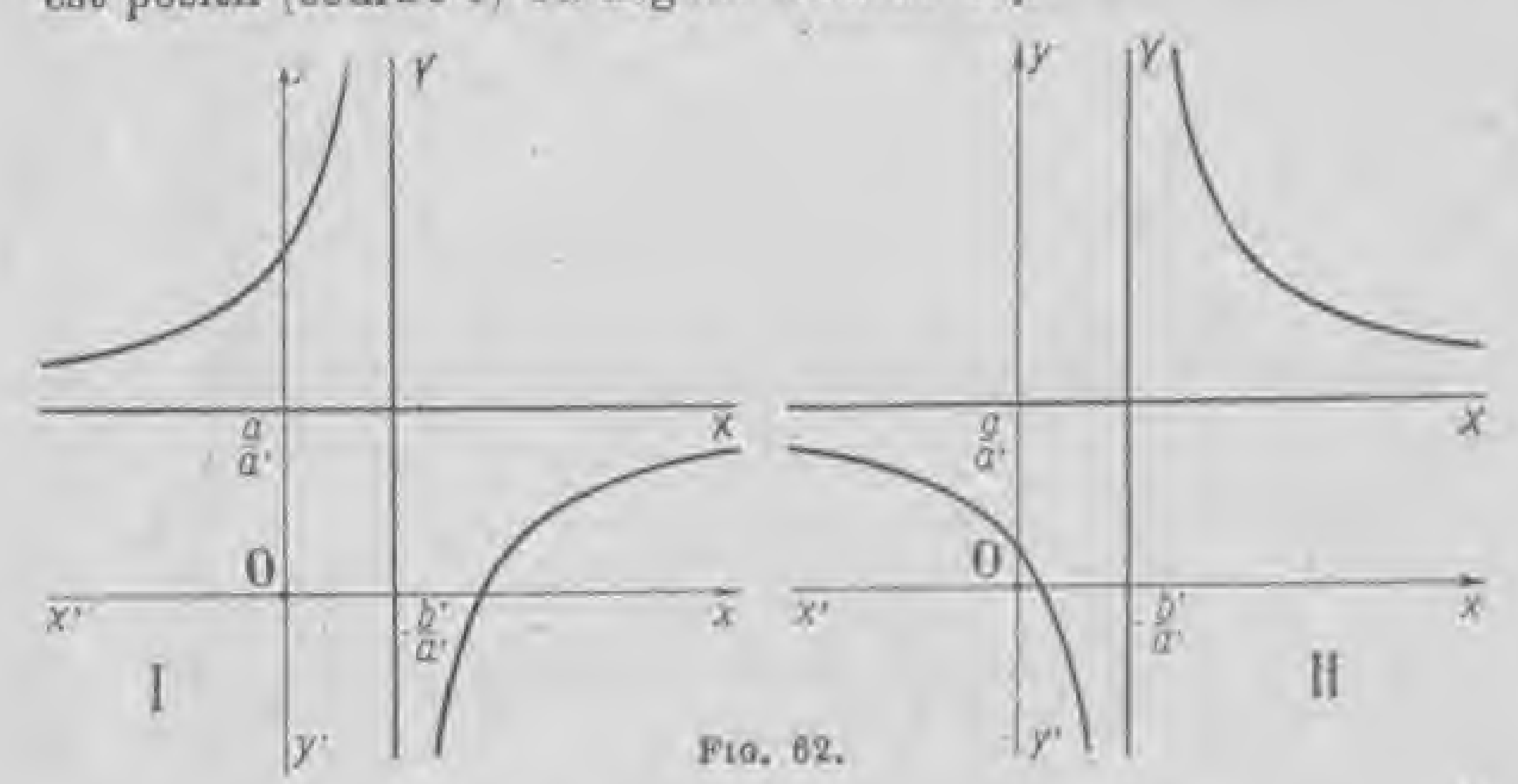


FIG. 62.

Si $ab' - a'b = 0$, d'après la remarque du n° 179, pour $x \neq -\dfrac{b'}{a'}$, $y = \dfrac{a}{a'}$, pour $x = -\dfrac{b'}{a'}$, y est indéterminé. **La courbe se réduit donc à ses asymptotes.**

181. ÉQUATION RÉDUITE ET SYMÉTRIE.

Si l'on prend pour nouveaux axes de coordonnées les deux asymptotes, il est possible de donner une forme plus simple à l'équation de la courbe.

Soient $\overline{O_1P_1} = X$ et $\overline{P_1M} = Y$ les coordonnées du point M dans le nouveau système d'axes défini par :

$$\overline{OE} = -\frac{b'}{a'} \text{ et } \overline{OI} = \frac{a}{a'}. \text{ (fig. 63)}$$

On peut écrire :

$$\overline{OP} = \overline{OE} + \overline{EP} = \overline{OE} + \overline{O_1P_1},$$

ou

$$x = -\frac{b'}{a'} + X;$$

de même :

$$PM = \overline{PP_1} + \overline{P_1M} = \overline{OI} + \overline{P_1M}$$

$$y = \frac{a}{a'} + Y$$

D'où :

$$\frac{a}{a'} + Y = \frac{a\left[-\dfrac{b'}{a'} + X\right] + b}{a'\left(-\dfrac{b'}{a'} + X\right) + b'}$$

$$= \frac{\dfrac{a'b - ab'}{a'} + aX}{a'X} = \frac{a'b - ab'}{a'^2X} + \frac{a}{a'},$$

et enfin :

$$Y = \frac{a'b - ab'}{a'^2X}.$$

L'équation peut s'écrire, en posant $\dfrac{a'b - ab'}{a'^2} = K = C^{te}$

$$XY = K.$$

Cette forme montre que la courbe est une **hyperbole équilatère,** *lieu des points dont le produit des distances à deux droites rectangulaires est constant.*

On démontre les symétries comme il a été fait pour la courbe.

$$Y = \frac{a}{X}$$

au n° 96.

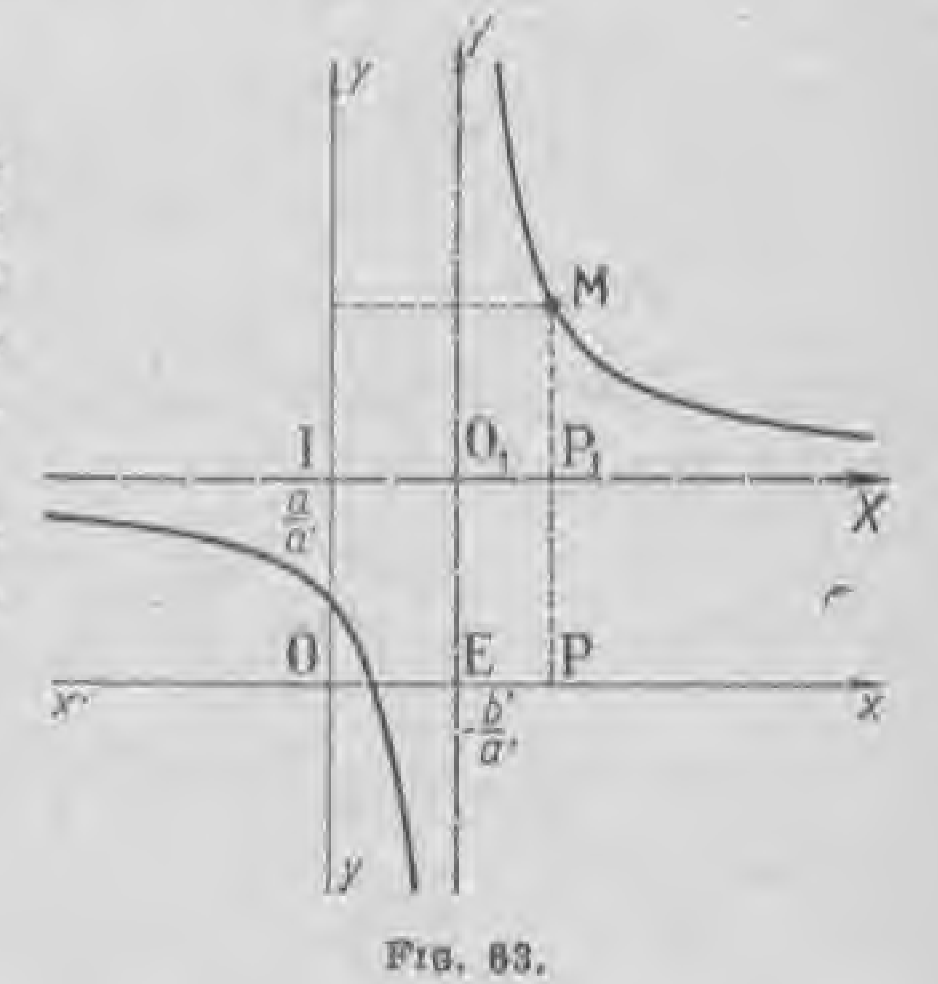


FIG. 63.

182. MARCHE A SUIVRE POUR L'ÉTUDE D'UNE FONCTION HOMOGRAPHIQUE.

a) *Détermination des intervalles où la fonction est définie et étude de sa* **continuité.**

b) **Étude du sens de variation** *par l'étude du signe du rapport*

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

c) **Recherche des asymptotes** *données par la valeur de* x *qui annule le dénominateur et par la valeur de* y *pour* $x = \pm\infty$.

d) **Recherche des points où la courbe coupe les axes de coordonnées :** *le point d'intersection avec Oy est donné par* $x = 0$

le point d'intersection avec Ox est donné par la valeur de x *qui annule le numérateur de* y.

e) **Tracé soigné du graphique.**

f) **Étude** *s'il y a lieu de* **son équation réduite et de sa symétrie.**

183. EXEMPLE D'ÉTUDE D'UNE FONCTION HOMOGRAPHIQUE.

Soit à étudier la variation de la fonction.

$$y = \frac{2x - 5}{3x + 2}.$$

Continuité.

a) La fonction est définie lorsque $x \neq -\frac{2}{3}$, valeur qui annule le dénominateur. On fera varier x de $-\infty$ à $-\frac{2}{3} - \varepsilon$ et de $-\frac{2}{3} + \varepsilon$ à $+\infty$. Si on donne à x un accroissement h, y prend un accroissement k et

$$y + k = \frac{2(x + h) - 5}{3(x + h) + 2}$$

$$k = \frac{2(x + h) - 5}{3(x + h) + 2} - \frac{2x - 5}{3x + 2} = \frac{19h}{(3x + 2)\,[3(x + h) + 2]}.$$

Lorsque $x \neq -\frac{2}{3}$, le dénominateur $(3x + 2)\,[3(x + h) + 2]$ n'est pas nul, la fonction $\frac{19}{(3x + 2)\,[3(x + h) + 2]}$ reste finie et k tend vers zéro en même temps que h. La fonction est continue.

Sens de variations.

b) Soient x_1 et x_2 deux valeurs de x et les valeurs correspondantes

$$y_1 = \frac{2x_1 - 5}{3x_1 + 2} \quad \text{et } y_2 = \frac{2x_2 - 5}{3x_2 + 2}$$

$$y_2 - y_1 = \frac{2x_2 - 5}{3x_2 + 2} - \frac{2x_1 - 5}{3x_1 + 2} = \frac{19(x_2 - x_1)}{(3x_2 + 2)\,(3x_1 + 2)}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{19}{(3x_2 + 2)\,(3x_1 + 2)}.$$

Lorsque x_1 et x_2 sont tous deux compris dans l'intervalle $-\infty, -\frac{2}{3} - \varepsilon$., $3x_1 + 2$ et $3x_2 + 2$ sont négatifs et le rapport est positif.

De même lorsque x_1 et x_2 sont tous deux compris dans l'intervalle $-\frac{2}{3} + \varepsilon, +\infty$; $3x_1 + 2$ et $3x_2 + 2$ sont positifs et le rapport est positif.

La fonction est donc croissante pour toutes les valeurs de x.

Asymptotes.

c) Lorsque x tend vers $-\frac{2}{3}$, y augmente indéfiniment en valeur absolue.

Pour x voisin de $-\frac{2}{3}$, le numérateur de y est négatif, si x se rapproche de $-\frac{2}{3}$ par valeurs inférieures, le dénominateur est négatif, y est positif et tend vers $+\infty$.

Si x tend vers $-\frac{2}{3}$ par valeurs supérieures, le dénominateur est positif, y est négatif et tend vers $-\infty$.

Lorsque x augmente indéfiniment, y qui peut s'écrire :

$$y = \frac{2 - \frac{5}{x}}{3 + \frac{2}{x}}$$

a pour limite : $y = \frac{2}{3}$.

Les deux droites $x = -\frac{2}{3}$ et $y = +\frac{2}{3}$ sont donc asymptotes à la courbe.

Lorsque $x = 0$, $y = -\frac{5}{2}$, point situé sur Oy.

Lorsque $x = \frac{5}{2}$, $y = 0$ point situé sur Ox.

On peut condenser ces résultats dans le tableau suivant :

	$-\infty$		$-\frac{2}{3} - \varepsilon$	$-\frac{2}{3} + \varepsilon$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y	$\frac{2}{3}$	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	$-\frac{3}{2}$	↗	0	↗	$\frac{2}{3}$

Graphique.

On commence par tracer les asymptotes.

Équation réduite. Prenons pour nouveaux axes de coordonnées, les deux asymptotes, $x = -2/3$ et $y = 2/3$.

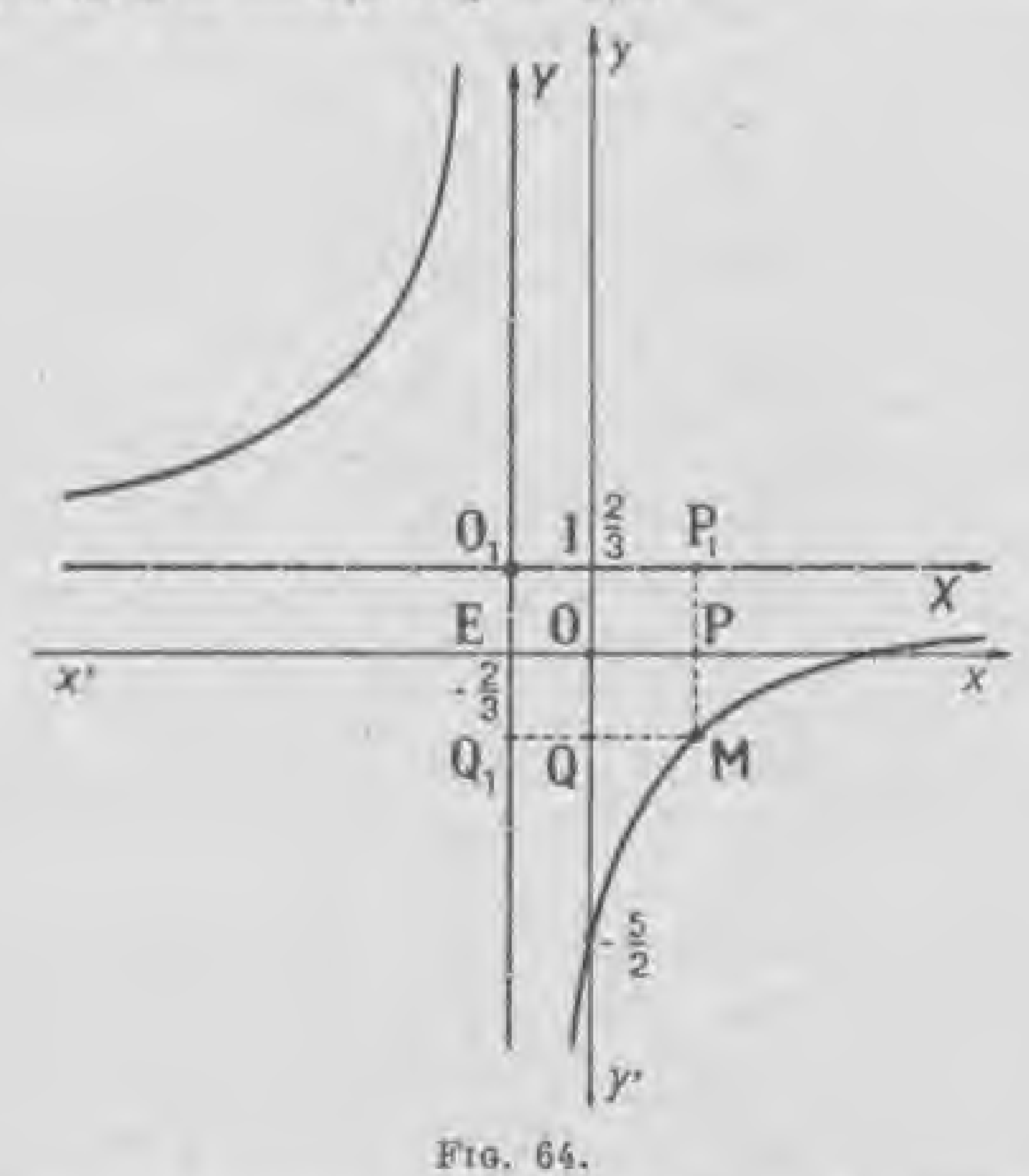


FIG. 64.

Les nouvelles coordonnées de M sont $\overline{O_1P_1} = X$, $\overline{P_1M} = Y$ et l'on peut écrire :

$$\overline{OP} = \overline{OE} + \overline{EP} = \overline{OE} + \overline{O_1P_1}, \quad \text{ou} \quad x = -2/3 + X$$

et $$\overline{PM} = \overline{PP_1} + \overline{P_1M} = \overline{OI} + \overline{P_1M} \quad y = \frac{2}{3} + X$$

d'où

$$y = \frac{2}{3} + Y = \frac{2\left[-\frac{2}{3} + X\right] - 5}{3\left[-\frac{2}{3} + X\right] + 2} = \frac{-\frac{19}{3} + 2X}{3X} = -\frac{19}{9X} + \frac{2}{3}$$

et
$$XY = -\frac{19}{9} = \text{constante}.$$

La symétrie se démontre comme au n° 96.

VARIATION DE LA FONCTION HOMOGRAPHIQUE

Étudier les variations des fonctions suivantes :

948. $$y = \frac{3}{x - 1}.$$

949. $$y = \frac{x - 1}{x + 1}.$$

950. $$y = \frac{5 - 2x}{3x + 7}.$$

951. $$y = \frac{x - 1}{2x - 1}.$$

952. $$y = \frac{4x - 9}{6 - 7x}.$$

953. $$y = \frac{5 - 2x}{3 + x}.$$

Déterminer les coefficients de la fonction
$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$$
pour que la fonction obtenue satisfasse aux conditions suivantes :

954. $f(1) = -1/4$; $f(-1) = -5/2$; $f(0) = -3$.

955. La courbe représentative de la fonction coupe Ox au point A(2, 0), l'axe Oy au point B(0, — 2) et admet pour asymptote la droite $x = 1/3$.

956. La courbe représentative admet pour asymptote les droites $x = -2$ et $y = 3$ et passe au point A (— 1, 7).

957. La courbe admet pour asympote la droite $y = -2$ et passe au point A (— 1, — 5/2) et B (2, — 1).

958. On considère la fonction
$$y = \frac{(m + 1)x + 2}{x + m}.$$

Déterminer suivant les valeurs de m le sens de variation de cette fonction.

Quelles sont les valeurs de m pour lesquelles y garde une valeur constante.

Construire les courbes correspondant aux valeurs $m = -1$ et $m = 3$.

959. On considère la fonction $y = \dfrac{3x - 2}{x - 3}$.

Tracer la courbe représentative.

D'un point M quelconque, on abaisse les perpendiculaires MP et MQ sur les axes Ox et Oy et l'on demande de déterminer la position du point M pour que l'aire du rectangle OPMQ ait une valeur donnée m. Discuter.

Lorsqu'il existe deux points M' et M" donnant la même valeur de l'aire, trouver les coordonnées du milieu N de M'M". Montrer que lorsque m varie, N reste sur une droite fixe que l'on précisera. Pouvait-on prévoir géométriquement ce résultat ? Quelle est la position de M correspondant au minimum de m ?

960. On considère l'équation
$$(m - 6)x^2 - (2m + 1)x + 8m - 2 = 0.$$

1° Discuter suivant les diverses valeurs du paramètre m l'existence et le signe des racines.

2° Déterminer m de manière que le double d'une des racines soit égal au triple de l'autre et calculer les racines dans ce cas.

3° Étudier et représenter graphiquement les variations de la fonction y représentant le produit des racines, m étant considérée comme une variable indépendante. (Hanoï, 1933.)

961. On donne l'équation du second degré
$$x^2 - 2mx + m - 1 = 0.$$

1° Démontrer que cette équation a toujours deux racines distinctes et dire quels sont les signes de ces racines quand m prend toutes les valeurs de
$$-\infty \text{ à } +\infty.$$

2° Étudier, dans les mêmes conditions, la variation de la somme des carrés des racines $y = x'^2 + x''^2$ et construire la courbe représentative en prenant m pour abscisse et y pour ordonnée.

3° Étudier, dans les mêmes conditions, la variation de la somme
$$z = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''},$$
et construire la courbe représentative en prenant m pour abscisse et z pour ordonnée.

962. Un point M parcourt une demi-circonférence de diamètre AB et se projette en H sur AB. On prend sur le diamètre AB un point C. On suppose que si l'unité est le centimètre, on a :
$$AB = 4, \quad AC = 3, \quad AH = x.$$

1° Étudier la variation du rapport $y = \dfrac{\overline{AM}^2}{\overline{CM}^2}$, considéré comme fonction de x, lorsque M va de A en B sur la demi-circonférence. Tracer la courbe représentative.

2° Étudier dans les mêmes conditions la variation de la somme des aires de deux sphères ayant pour diamètre l'une MH, l'autre MC. Tracer la courbe représentative.

3° Valeurs de x telles que la somme des deux aires considérées dans le 2° soit égale à l'aire d'un cercle de rayon a. Discuter. (Lyon, 1932.)

963. AB = 2R est un diamètre d'une sphère de centre O ; un plan, perpendiculaire à ce diamètre en un point I situé entre O et A, coupe la sphère suivant un cercle de diamètre MN ; S est le sommet du cône circonscrit à la sphère le long de ce cercle, et le plan tangent en B à la sphère coupe ce cône suivant le cercle de diamètre PQ. On pose :

$$AI = x.$$

1° Évaluer en fonction de R et x l'aire totale S et le volume V du solide PMANQ constitué par le tronc de cône PMNQ et la calotte sphérique MAN. Relation entre S et V. Justification géométrique du résultat trouvé.

2° Évaluer en fonction de R et x l'aire latérale s du cône SMN et les aires s' et s'' des calottes sphériques MAN et MBN. Comment varient les deux rapports $y = \frac{s}{s'}$ et $Z = \frac{s}{s''}$ lorsque x varie de zéro à R ? Pour quelles valeurs de x le rapport y prend-il la valeur $\frac{3}{2}$ et le rapport Z les valeurs $\frac{1}{2}$ et 1 ? Tracer les deux courbes représentatives des variations sur le même graphique, en prenant R = 1. (Alexandrie, 1932.)

964. Soit un cercle de centre O et de rayon R. On considère un diamètre Ox et la tangente BT au cercle parallèle au diamètre.

Par un point N de Ox, on mène les tangentes NP_1, NP_2 au cercle, qui coupent la tangente BT en M_1 et M_2.

1° Calculer, en fonction de ON = x, les surfaces engendrées par M_1P_1 et M_2P_2 dans leur rotation autour de Ox.

2° Variation de la surface engendrée par le segment M_1P_1 quand N se déplace sur Ox.

3° Déterminer la position du point N de façon que

$$k \text{ Surf. } M_1P_1 + \text{Surf. } M_2P_2 = 4\pi R^2.$$

Nota. — Dans cette dernière égalité, on désigne par Surf. M_1P_1 et Surf. M_2P_2 les surfaces engendrées par M_1P_1 et M_2P_2 dans leur rotation autour de Ox, et par k un coefficient numérique positif. (Rennes, 1930.)

965. Sur un quart de circonférence AB, de centre O et de rayon R, on considère un point M. On abaisse de M les perpendiculaires MP et MQ sur les rayons OA, OB, et on trace la corde AM. On pose OP = x.

1° Déterminer x de façon que la somme MP + MQ prenne une valeur donnée k. Discuter.

2° Déterminer x de façon que le rapport $\frac{MA}{MQ}$ prenne une valeur donnée m. Discuter. Cas où $m = 2$.

3° On fait tourner la figure autour de OA. Évaluer, en fonction de x et de R, le volume V_1 engendré par le triangle OMA, et le volume V_2 engendré par le segment de cercle limité par la corde AM. Étudier la variation de la fonction $y = \frac{V_1}{V_2}$ et la représenter graphiquement en prenant R = 1. (Martinique, 1921.)

CHAPITRE XIII

DÉRIVÉE D'UNE FONCTION. APPLICATION.

184. DÉFINITION DE LA DÉRIVÉE POUR UNE VALEUR DONNÉE DE LA VARIABLE.

Considérons une fonction $y = f(x)$ **définie et continue** pour une valeur donnée x_1, de la variable.

$$y_1 = f(x_1).$$

Si l'on donne à la variable x, à partir de x_1 un certain accroissement h, la fonction y prend un accroissement k en sorte que :

$$y_1 + k = f(x_1 + h).$$

et :
$$k = f(x_1 + h) - f(x_1).$$

Le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable est donné par :

$$\frac{k}{h} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}.$$

La fonction y étant continue, par hypothèse, lorsque h tend vers zéro, k tend aussi vers zéro et le rapport $\frac{k}{h}$ prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Si le rapport $\frac{k}{h}$ a une valeur limite lorsque h tend vers zéro, cette valeur limite est, par définition, la dérivée de la fonction $y = f(x)$ pour la valeur x_1 de la variable.

La dérivée d'une fonction $y = f(x)$ pour une valeur donnée x_1 de la variable est la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable quand ce dernier accroissement tend vers zéro. Elle se note par le symbole $y' = f'(x_1)$ qui s'énonce y prime, f prime de x_1.

Exemples : a) *Soit la fonction* $y = 3x - 5$.

Pour $x = 2$, $y = 1$.

Si l'on donne à x l'accroissement h, à partir de la valeur 2, il prend la valeur $2 + h$ et y prend la valeur $1 + k$....

et l'on a : $1 + k = 3(2 + h) - 5 = 1 + 3h,$

donc : $k = 3h.$

Le rapport $\frac{k}{h} = 3$ et lorsque h tend vers zéro, il garde la même valeur.

donc : $$y' = \lim_{h=0} \frac{k}{h} = 3.$$

La dérivée de la fonction $y = 3x - 5$ *pour* $x = 2$ *est égale à* 3

b) *Soit la fonction* $y = -2x^2 + 3x - 1$.

Pour $x = 3$, $y = -10$

Pour $x = 3 + h$ $$y + k = -10 + k$$
$$= -2(3 + h)^2 + 3(3 + h) - 1$$
$$= -10 - 9h - 2h^2.$$

d'où on tire :
$$k = -9h - 2h^2$$

puis $$\frac{k}{h} = -9 - 2h.$$

Lorsque h *tend vers zéro, la limite du rapport* $\frac{k}{h}$ *est :*
$$y' = \lim_{h=0} \frac{k}{h} = -9$$

qui est la valeur de la dérivée de y, *pour* $x = 3$.

c) *Soit la fonction* $$y = \frac{5x - 2}{2x + 1}$$

pour $x = -1$, $y = 7$

pour $x = -1 + h$, $y + k = 7 + k = \dfrac{-7 + 5h}{-1 + 2h}$;

d'où :
$$k = \frac{-7 + 5h}{-1 + 2h} - 7 = \frac{-9h}{-1 + 2h}.$$

et $$\frac{k}{h} = \frac{-9}{-1 + 2h}.$$

Lorsque h *tend vers zéro,*
$$\lim_{h=0} \frac{k}{h} = y' = +9$$

qui est la valeur de la dérivée de $y = \dfrac{5x - 2}{2x + 1}$ *pour* $x = -1$.

185. DÉRIVÉE DE LA FONCTION DU SECOND DEGRÉ.

Soit $$y = ax^2 + bx + c$$

un trinôme du second degré.

Pour $x = x_1$, $y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c$.

Si l'on donne à x un accroissement h, y prend un accroissement k,

et : $$y_1 + k = a(x_1 + h)^2 + b(x_1 + h) + c$$

et $$k = [a(x_1 + h)^2 + b(x_1 + h) + c] - (ax_1^2 + bx_1 + c)$$
$$= 2ax_1h + ah^2 + bh$$

d'où $$\frac{k}{h} = 2ax_1 + b + ah.$$

Lorsque h tend vers zéro, le rapport $\frac{k}{h}$ a pour valeur limite.
$$\boldsymbol{y' = 2ax_1 + b.}$$

C'est la valeur de la dérivée de y pour $x = x_1$.

186. DÉRIVÉE DE LA FONCTION HOMOGRAPHIQUE.

Soit : $$y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$$

une fonction homographique.

On aura pour $x = x_1$ $y_1 = \dfrac{ax_1 + b}{a'x_1 + b'}$ $\left(x_1 \neq -\dfrac{b'}{a'}\right)$.

et, en donnant à x_1 l'accroissement h ;
$$y_1 + k = \frac{a(x_1 + h) + b}{a'(x_1 + h) + b'}$$

d'où $$k = \frac{a(x_1 + h) + b}{a'(x_1 + h) + b'} - \frac{ax_1 + b}{a'x_1 + b'}$$
$$= \frac{h(ab' - a'b)}{[a'(x_1 + h) + b'](a'x_1 + b')}.$$

On a : $$\frac{k}{h} = \frac{ab' - a'b}{[a'(x_1 + h) + b'](a'x_1 + b')};$$

d'où : $$y' = \lim_{h=0} \frac{k}{h} = \frac{ab' - a'b}{(a'x_1 + b')^2}.$$

TANGENTE A UNE COURBE.

Soient une courbe (C) et une sécante MM' à cette courbe.

Si l'on fait pivoter la sécante MM' autour du point M de telle manière que le point M' se rapproche indéfiniment du point M, **la sécante tend en général vers une position limite qui est par définition, la tangente à la courbe (C).**

Elle rencontre la courbe (C) en deux points confondus.

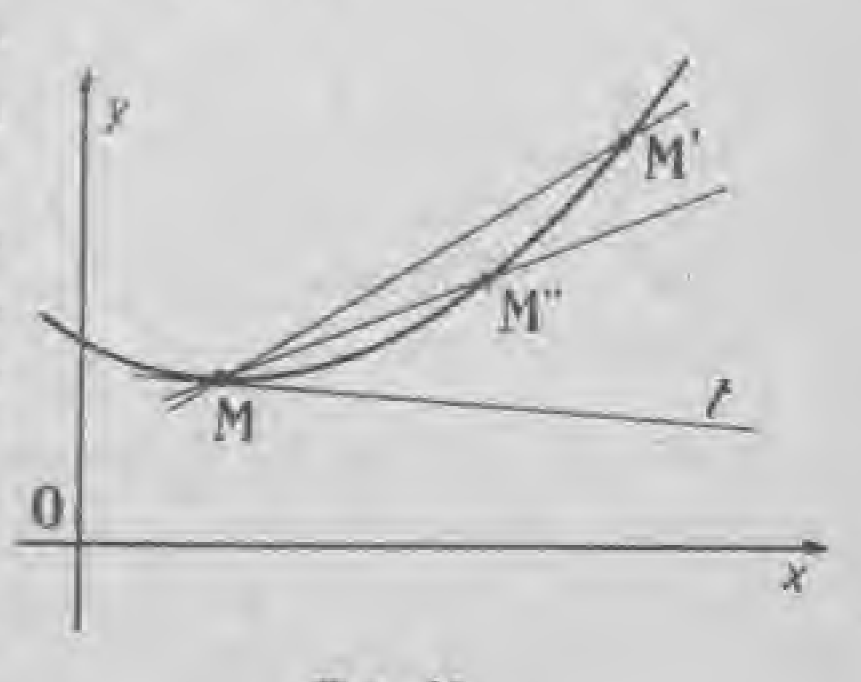


Fig. 65.

187. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE LA DÉRIVÉE.

Soient $y = f(x)$ une fonction définie et continue de x dans un certain intervalle, (C) la courbe représentative de la variation de la fonction.

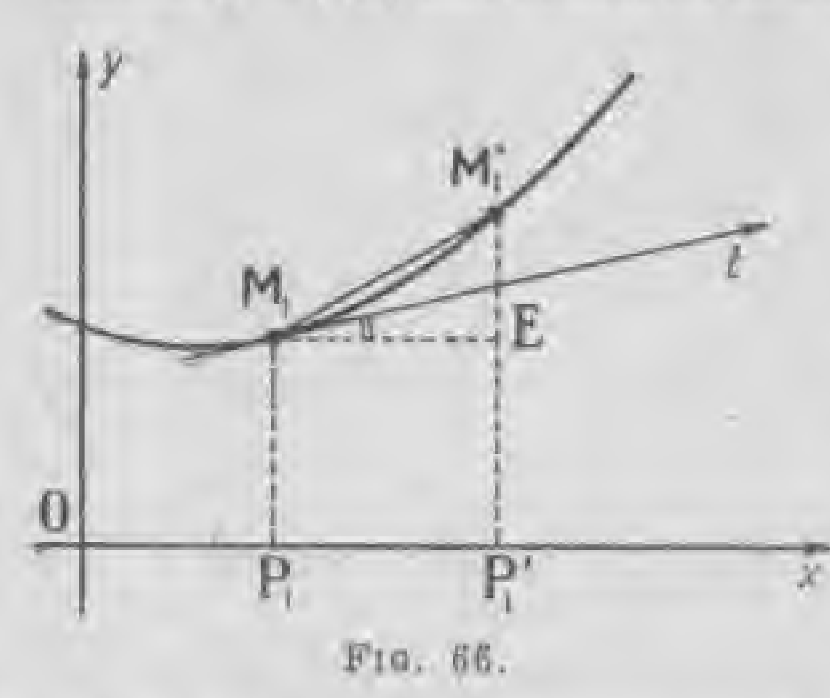


Fig. 66.

Soient x_1 une valeur de x de l'intervalle considéré et y_1 la valeur correspondante de y. Ce sont les deux coordonnées d'un certain point M_1 de la courbe (C).

Si nous donnons à x_1 un certain accroissement h, y_1 prend un certain accroissement k et le point M'_1 correspondant a pour coordonnées :

$$\overline{OP'_1} = x_1 + h, \quad \overline{P'_1M'_1} = y_1 + k.$$

d'où :

$$\overline{P_1P'_1} = \overline{M_1E} = h \text{ et } \overline{EM'_1} = k.$$

On peut écrire dans le triangle $EM_1M'_1$

$$\operatorname{tg} \widehat{EM_1M'_1} = \frac{\overline{EM'_1}}{\overline{M_1E}} = \frac{k}{h}.$$

Ce rapport n'est autre que le coefficient angulaire de la sécante $M_1M'_1$.

Lorsque h tend vers zéro, le point P'_1 se rapproche indéfiniment du point P_1 sur l'axe Ox ; sur la courbe (C) le point M'_1 se rapproche indéfiniment du point M_1, la sécante $M_1M'_1$ a pour position limite la tangente M_1t à la courbe (C) au point M_1.

L'angle $\widehat{EM_1M'_1}$ a pour limite l'angle $\widehat{EM_1t}$ et

$$\lim \operatorname{tg} \widehat{EM_1M'_1} = \operatorname{tg} \widehat{EM_1t}$$

Or :

$$\lim \operatorname{tg} \widehat{EM_1M'_1} = \lim \frac{k}{h} = y',$$

donc :

$$y' = \operatorname{tg} \widehat{EM_1t}.$$

La dérivée d'une fonction $y = f(x)$ pour une valeur déterminée x_1 de la variable est égale au coefficient angulaire de la tangente à la courbe représentative de la fonction au point d'abscisse x_1.

188. APPLICATION. ÉQUATION DE LA TANGENTE A UNE COURBE EN UN POINT DONNÉ.

Soit M_0 un point de la courbe (C) représentative de la fonction $y = f(x)$, de coordonnées

$$x_0 \quad \text{et} \quad y_0 = f(x_0).$$

L'équation générale des droites qui passent par le point M_0 est : (nº 84) :

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

m étant le coefficient angulaire de la droite considérée.

Or, d'après ce qui précède, le coefficient angulaire de la tangente à la courbe au point M_0 est égale à la dérivée y'_0 de $y = f(x)$ en ce point.

L'équation de la tangente à la courbe au point M_0 est donc :

$$\boldsymbol{y - y_0 = y'_0(x - x_0).}$$

189. Exemples. — a) *Soit à trouver l'équation de la tangente à la courbe*

$$y = 2x^2 - 5x + 2$$

au point d'abscisse $x = 2$.

Le point M_0 d'abscisse $x_0 = 2$ a pour ordonnée $y_0 = f(2) = 0$.

Si l'on donne à x la valeur $2 + h$.

$$y + k = 2(2 + h)^2 - 5(2 + h) + 2 = 3h + 2h^2$$

$$k = 3h + 2h^2$$

$$\frac{k}{h} = 3 + 2h.$$

$$\lim_{h=0} \frac{k}{h} = 3.$$

La dérivée est donc égale à $y' = 3$.

L'équation de la tangente est donc

$$y - 0 = 3(x - 2)$$

$$y = 3x - 6.$$

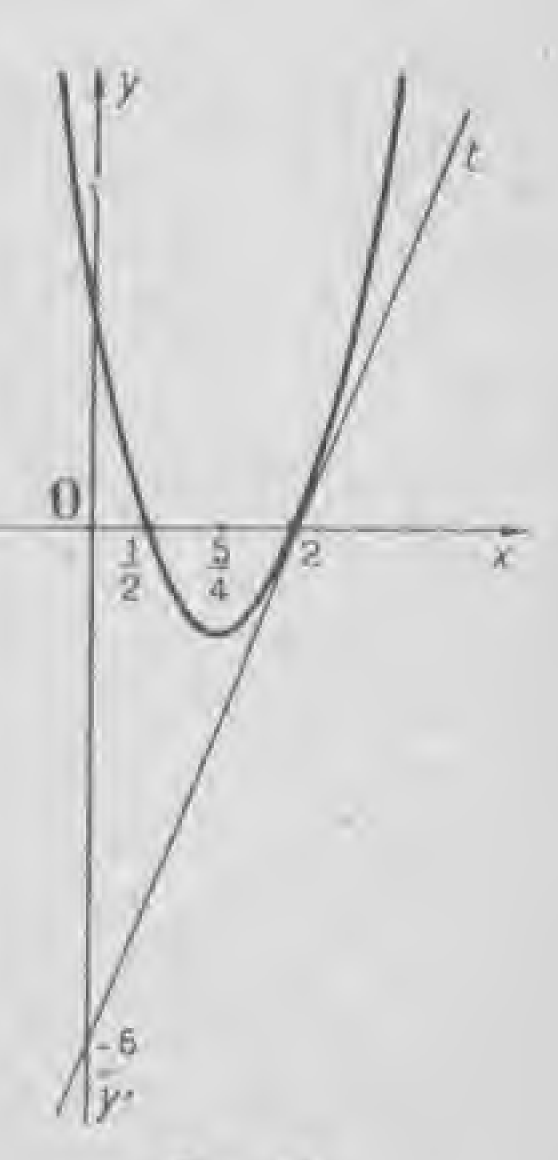


Fig. 67.

b) *Soit à trouver l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction :*

$$y = \frac{2x - 3}{x - 1}$$

au point d'abscisse $x = 2$.

Pour $x = 2$, $y = 1$.

L'équation de la tangente sera de la forme

$$y - 1 = m(x - 2),$$

m étant le coefficient angulaire de la tangente, qui égale la valeur de la dérivée de y en ce point.

Si l'on donne à x la valeur $2 + h$, y devient

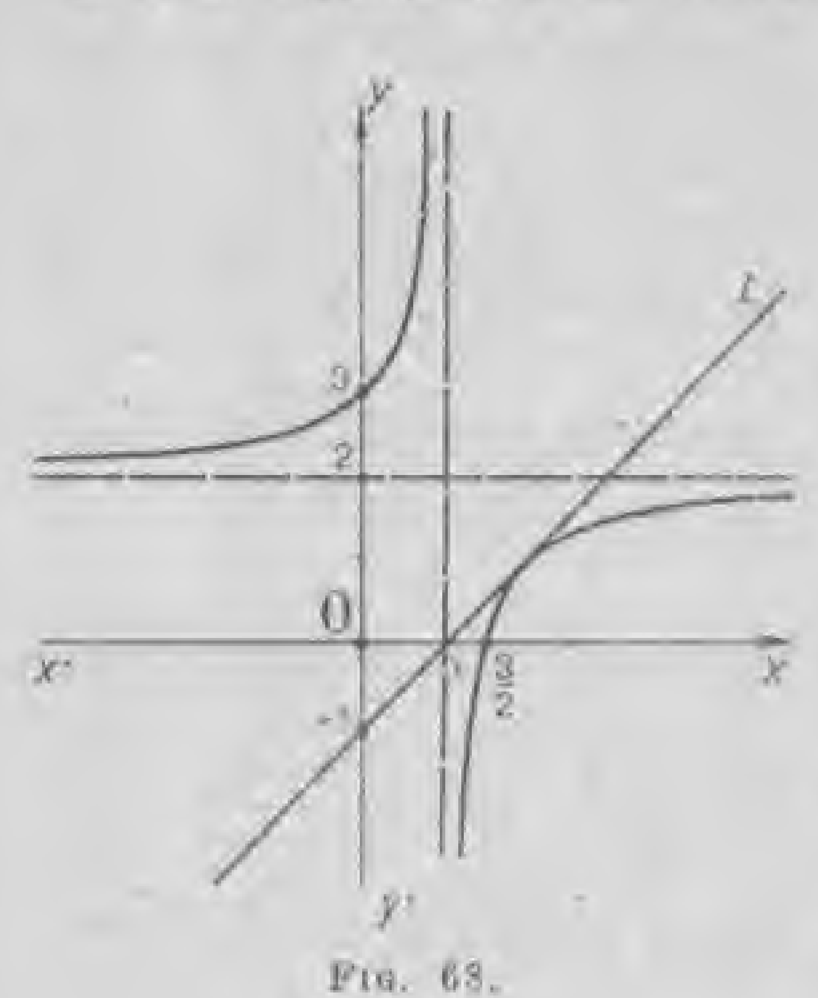


Fig. 63.

$$1 + k = \frac{2(2+h)-3}{2+h-1}$$
$$= \frac{2h+1}{h+1},$$

d'où : $k = \frac{h}{h+1}$

$$\frac{k}{h} = \frac{1}{h+1}$$

$$\lim_{h=0} \frac{k}{h} = 1.$$

et : $y' = 1.$

L'équation de la tangente est donc :

$$y - 1 = (x - 2)$$

ou : $\mathbf{y = x - 1.}$

DÉRIVÉES ET APPLICATIONS

Calculer, en partant de la définition, la valeur de la dérivée des fonctions suivantes pour la valeur indiquée de la variable :

966. $y = x^2 - 3x + 2$ pour $x = 1$;

967. $y = 5x^2 - 3x + 1$ pour $x = -1$.

968. $y = 2x^2 + 5x - 2$ pour $x = 3$.

969. $y = -3x^2 + 4x + 4$ pour $x = -3$.

970. $y = \frac{x-2}{x+3}$ pour $x = 1$.

971. $y = \frac{3x-1}{2x+1}$ pour $x = 2/3$.

972. $y = \frac{4x-3}{4-3x}$ pour $x = -1$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe proposée pour la valeur indiquée de la variable et

973. $y = x^2 - x + 1$ pour $x = 3$.

974. $y = -3x^2 + 2x + 5$ pour $x = -2/3$.

975. $y = \frac{3x-2}{4x+5}$ pour $x = -3/2$.

976. $y = \frac{2x-1}{3x+1}$ pour $x = -2/5$.

Trouver la valeur des dérivée des fonctions suivantes pour une valeur donnée x_1 quelconque de la variable. En déduire les coordonnées du

point de la courbe où la tangente a la pente m indiquée, et écrire l'équation de cette tangente :

977. $y = x^2 - 5x + 3$; $m = 3$.

978. $y = -x^2 + 4x - 1$; $m = 2/3$.

979. $y = \frac{x^2}{2} - 3x + 4$; $m = -\frac{1}{3}$.

980. $y = \frac{3x+2}{2x-3}$ $m = -\frac{13}{9}$.

981. $y = \frac{5-2x}{x+4}$ $m = -2$.

982. On considère la fonction $y = ax^2 + bx + c$. Déterminer les coefficients a, b, c pour que la courbe représentative coupe l'axe Ox au point d'abscisse $x = 3$ et soit tangente au point d'abscisse $x = 2$ à la droite $y = 6x - 23$?

983. On considère la fonction $y = ax^2 + bx + c$. Déterminer les coefficients a, b, et c pour que les tangentes à la courbe menées par l'origine aient pour pente -1 et -9 et que la tangente au point d'abscisse $x = 5/2$ ait une pente nulle.

984. On donne la fonction $y = x^2/4$. Trouver les équations des tangentes à cette courbe menées par le point A(3, $-$1). Quel est l'angle de ces tangentes et trouver leurs points de contact B et C ? Équation de la droite BC. On joint le point A au point F(0, 1). Équation de la droite AF. Vérifier qu'elle est perpendiculaire à BC.

985. On considère la fonction $y = ax^2$ et le point d'abscisse x_0 sur cette courbe. Équation de la tangente à la courbe MT en ce point. Coordonnées du point T où elle coupe l'axe OY. On mène la droite MN perpendiculaire à MT en M et soit N son point de rencontre avec OY. Équation de MN. Si Q est la projection de M sur Oy, calculer QN et TQ. Vérifier que Q et T sont symétriques par rapport à O.

Peut-on trouver une propriété analogue pour toute fonction du second degré ?

986. On considère la fonction $y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$.

Déterminer a, b a' et b' de manière que la courbe admette les asymptotes $x = 3$ et $y = -2$ et soit tangente à la droite $y = 4x$.

987. On considère la fonction $y = \frac{3x-2}{x+2}$. Étudier l'intersection de cette courbe avec la droite $y = \frac{4}{9}x + m$. Discuter. Pour quelles valeurs de m la droite est-elle tangente à la courbe ? Trouver le lieu du milieu des points d'intersection de la droite et de la courbe quand m varie et vérifier qu'il passe par les points de contact des tangentes trouvées précédemment.

988. On considère la fonction $y = a/x$. Déterminer l'équation de la tangente à cette courbe en un point quelconque M d'abscisse x_0. Déterminer les coordonnées des points de rencontre P et Q de cette tangente avec les axes de coordonnées ; montrer que M est au milieu de PQ et que le triangle POQ a une aire constante quand M décrit la courbe. Cette propriété est-elle commune à toutes les fonctions homographiques ?

CHAPITRE XIV

APPLICATIONS DES VARIATIONS DE FONCTIONS

§ I. *INTERSECTION DE DEUX COURBES.*

190. ÉQUATIONS AUX ABSCISSES DES POINTS DE RENCONTRE DE DEUX COURBES. — Soient les équations de deux courbes : (1) $y = f(x)$ et $y = \varphi(x)$, (2)
rapportées aux mêmes axes de coordonnées.

En éliminant y entre ces deux relations, on a l'équation :

$$f(x) = \varphi(x). \qquad (3)$$

dont les racines sont les abscisses des points de rencontre des courbes (1) et (2).

L'équation (3) prend le nom d'*équation aux abscisses des points de rencontre des courbes d'équation* (1) *et* (2).

Les ordonnées de ces points s'obtiennent en remplaçant x dans (1) ou (2) par les racines de (3).

Cas particuliers. — *Lorsque l'équation* (3) *a deux racines confondues, les courbes* (1) *et* (2) *ont elles-mêmes, pour cette valeur de l'abscisse, deux points confondus et sont, par suite, tangentes en ce point.*

Exemple. — *Déterminer les points d'intersection de la courbe d'équation* $y = (m - 1)x^2 + 2x + (m - 1)$ (1)
avec la droite $y = mx + 3 - m.$ (2)

Discuter.

Les abscisses des points de rencontre des courbes (1) et (2) sont données par l'équation :

$$(m-1)x^2 + 2x + m - 1 = mx + 3 - m,$$

qui peut encore s'écrire :

$$(m-1)x^2 - (m-2)x + 2m - 4 = 0. \qquad (3)$$

Les racines de cette équation sont réelles si on a :

$$(m-2)^2 - 4(m-1)(2m-4) = -7m^2 + 20m - 12 \geqslant 0. \qquad (4)$$

Les racines du trinôme (4) sont :

$$m'' = +2 \quad \text{et} \quad m' = +\frac{6}{7};$$



FIG. 69.

par suite, pour $\frac{6}{7} < m < 2,$

l'équation (3) a deux racines distinctes et la droite coupe la courbe en deux points distincts.

Si $m = 2$ ou $m = \frac{6}{7},$

l'équation (3) a une racine double et dans chacune des positions correspondantes, la droite (2) est tangente à la courbe (1). Dans ces cas les coordonnées des points de contact sont respectivement :

pour $m = 2,\quad x_1 = 0,\quad y_1 = 1,$

et pour $m = \frac{6}{7},\quad x_2 = 4,\quad y_2 = \frac{39}{7}.$

§ II. *DISCUSSION GRAPHIQUE D'UNE ÉQUATION.*

191. L'ÉQUATION A DISCUTER DÉPEND D'UN SEUL PARAMÈTRE. — Nous allons expliquer sur deux exemples la marche à suivre.

Discuter suivant les valeurs de m *l'existence et le signe des racines de l'équation :*

$$x^2 - 2x + m - 4 = 0.$$

On peut l'écrire :

$$m = -x^2 + 2x + 4.$$

nsidérons la courbe représentative de la fonction :

$$y = -x^2 + 2x + 4 \quad (1)$$

et la droite variable

$$y = m \quad (2)$$

parallèle à Ox.

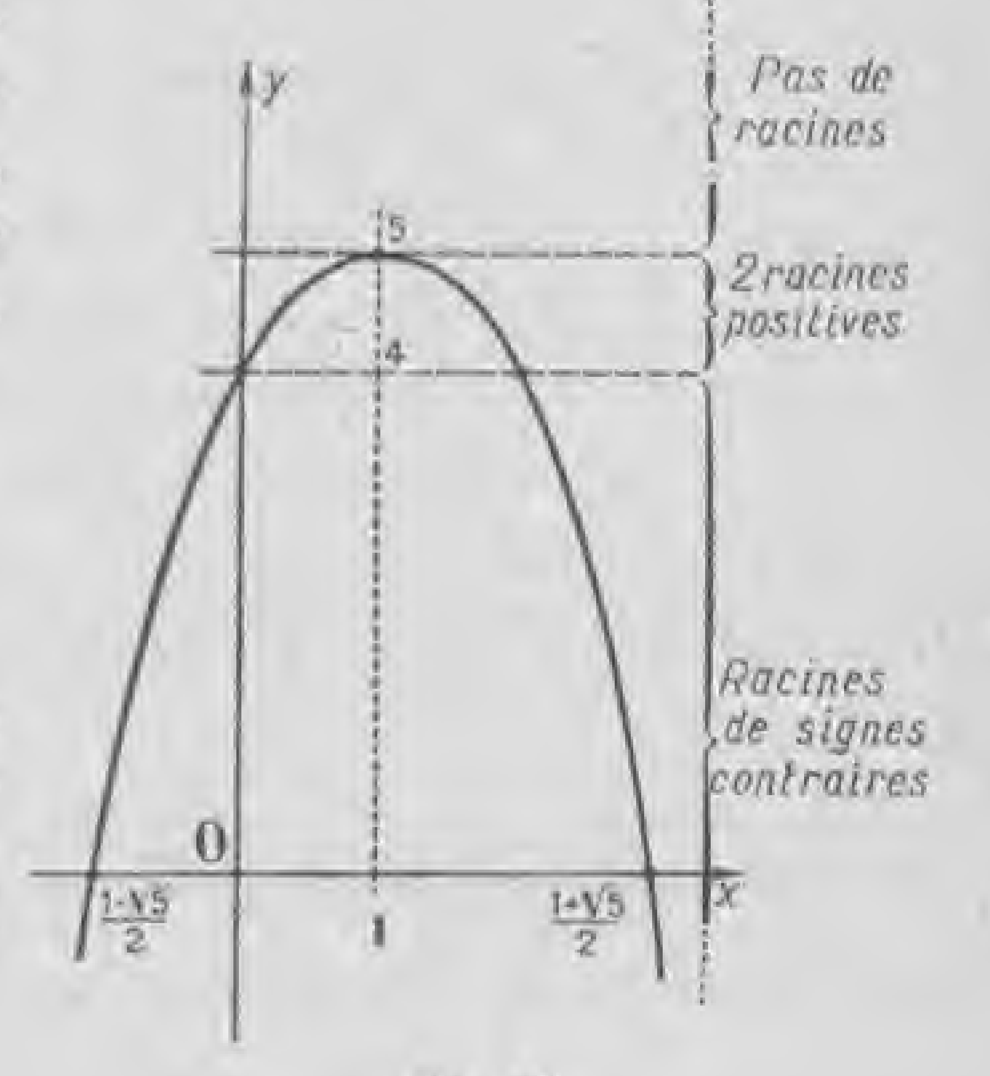


FIG. 70.

Traçons la courbe (1).

Cette fonction passe par un maximum égal à 5 pour $x = 1$. Elle s'annule pour

$$x'' = 1 - \sqrt{5}$$

et $$x' = 1 + \sqrt{5}.$$

Elle coupe Oy au point (0,4).

La droite $y = m$ est parallèle à Ox. Les coordonnées des points

d'intersection de la courbe (1) et de la droite (2) s'obtiennent en égalant les x et les y de la droite avec ceux de la courbe, ce qui donne l'équation :

$$m = -x^2 + 2x + 4 \quad \text{ou} \quad x^2 - 2x + m - 4 = 0. \qquad (3)$$

Les abscisses des points d'intersection sont les racines de cette équation. En faisant varier m de $-\infty$ à $+\infty$, on voit sur la courbe que :

Pour $m > 5$: on n'a aucun point de rencontre, donc les racines de (3) n'existent pas ;

Pour $4 < m < 5$: on a deux points d'intersection, les abscisses sont toutes deux positives.

Pour $m < 4$: racines de signes contraires.

II. — *La somme des 12 arêtes d'un parallélépipède à base carrée est donnée égale à 4a ; soit x le côté de la base et y la hauteur.*

1° Exprimer la surface s des 6 faces en fonction de x et étudier les variations de s quand x varie.

2° Déterminer x de manière que cette surface soit égale à 2b². Discuter.

Fig. 71.

1° On a : $8x + 4y = 4a$,

ou $2x + y = a$ ou $y = a - 2x$.

La surface latérale égale :

$$4xy = 4x(a - 2x) = 4ax - 8x^2.$$

La surface des bases est $2x^2$, donc $S = 4ax - 6x^2$. (1)

C'est une fonction du second degré qui s'annule pour $x = 0$ et $x = \frac{2a}{3}$.

Elle présente un maximum égal à $\frac{2a^2}{3}$ pour $x = \frac{a}{3}$.

2° $S = 2b^2$, d'où l'équation :

$$4ax - 6x^2 = 2b^2,$$

ou bien $3x^2 - 2ax + b^2 = 0$. (2)

Pour discuter cette équation, on remarque que y doit être positif ;

or $2x + y = a$ ou $y = a - 2x$

donc il faut $x < \frac{a}{2}$.

La courbe suivante permet de faire une discussion graphique immédiate.

L'équation (2) peut s'écrire : $2b^2 = 4ax - 6x^2$.

Elle représente l'équation aux abscisses des points d'intersection de la fonction

$$y = 4ax - 6x^2 ;$$

et de la droite

$$y = 2b^2 \text{ parallèle à } Ox.$$

Coupons la courbe par une parallèle à Ox, en remarquant que la partie située dans l'intervalle $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ convient seule au problème.

Pour

$$x = \frac{a}{2}, \; y = 4a \times \frac{a}{2} - \frac{6a^2}{4} = \frac{a^2}{2}.$$

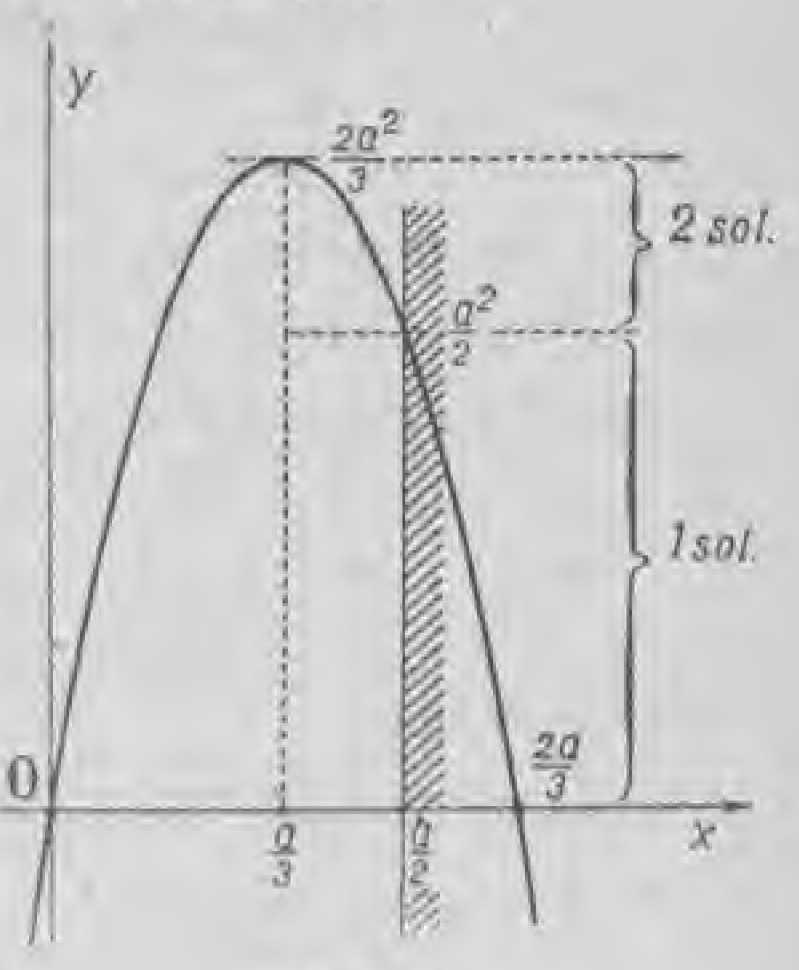


Fig. 72.

On voit que :

pour $0 < 2b^2 < \frac{a^2}{2}$ ou $b^2 < \frac{a^2}{4}$ on a une solution

et pour $\frac{a^2}{2} < 2b^2 < \frac{2a^2}{3}$ ou $\frac{a^2}{4} < b^2 < \frac{a^2}{3}$

on a deux solutions.

§ III. FAMILLES DE COURBES.

192. VARIATIONS D'UNE FONCTION QUI DÉPEND D'UN PARAMÈTRE. — *On considère la fonction*

$$y = \frac{ax - 2}{x - 2a}, \qquad (1)$$

où a désigne un paramètre.

1° Indiquer le sens des variations de cette fonction suivant les valeurs attribuées au paramètre.

2° Peut-on choisir a de façon que cette fonction reste constante quel que soit x ?

3° Construire la courbe représentative dans les deux cas suivants

$$a = 4, \quad a = \frac{1}{2}.$$

4° Dans le cas général, existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles la fonction prend la même valeur que la fonction

$$y = x - a. \qquad (2)$$

Discuter.

1° Cette fonction est homographique et son sens de variation dépend du signe de $ab' - a'b$.

Or, $ab' - a'b = +2 - 2a^2 = 2(1 - a^2)$.

Il y a lieu de distinguer 3 cas.

1er *Cas* : $1 - a^2 > 0$ ou $-1 < a < 1$.

La fonction y est croissante.

2e *Cas* : $a^2 - 1 = 0$, $a = \pm 1$,

$y = a$, y est constante :

mais pour $x = 2a = \pm 2$, y est indéterminé et peut prendre une valeur arbitraire.

3e *Cas* : $1 - a^2 < 0$ pour $a < -1$ ou $a > 1$.

y est une fonction décroissante.

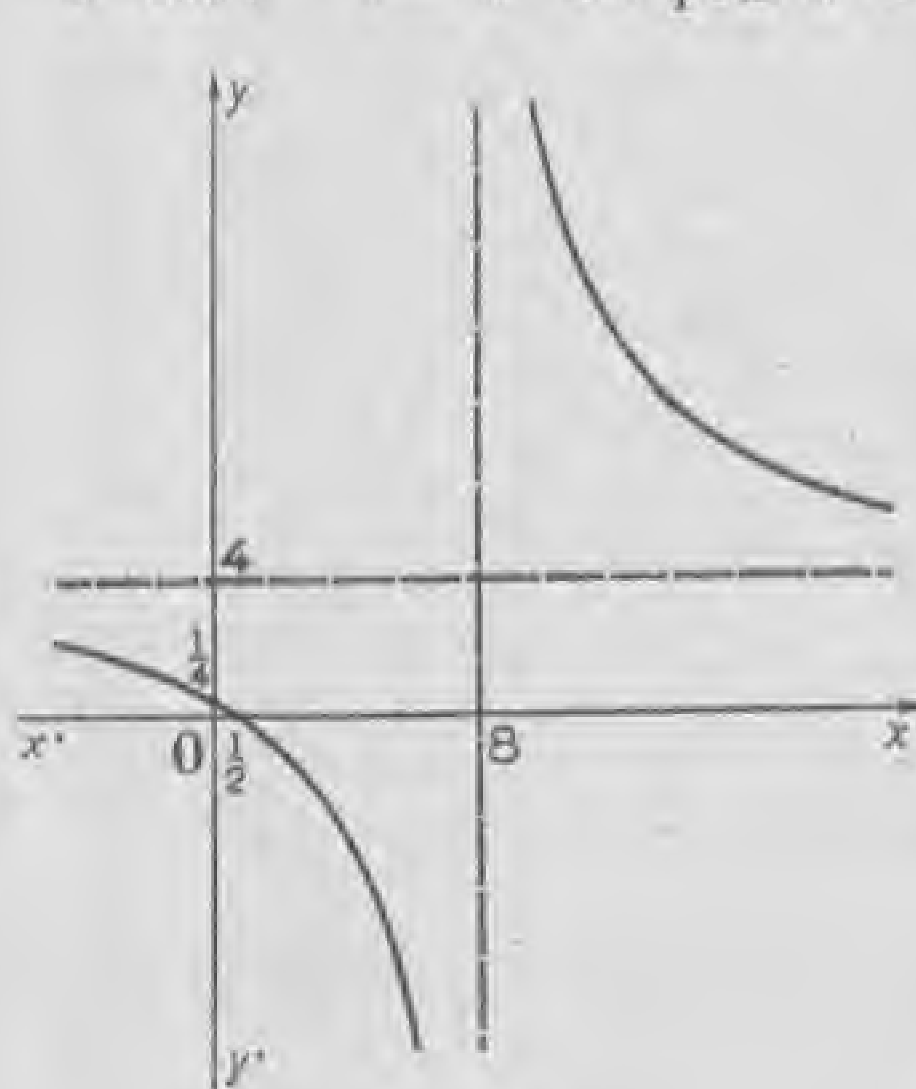


FIG. 73.

2° Si $a = \pm 1$

$$y = a = C^{te},$$

pour toutes les valeurs de x différentes de $2a$.

3° Si $a = 4$, la fonction devient :

$$y = \frac{4x - 2}{x - 8}.$$

Comme

$$ab' - a'b = -32 + 2 = -30,$$

c'est une fonction décroissante.

Elle admet une asymptote verticale $x = 8$ et une asymptote horizontale $y = 4$.

y s'annule pour $x = \frac{1}{2}$; si $x = 0, y = \frac{1}{4}$.

Centre de symétrie $x = 8$, $y = 4$.

Si $a = \frac{1}{2}$, on a : $y = \frac{x - 4}{2(x - 1)}$.

Comme $ab' - a'b = -2 + 8 = 6 > 0$, la fonction est croissante.

Asymptote verticale : $x = 1$,

asymptote horizontale : $y = \frac{1}{2}$.

Pour $x = 0$, $y = 2$,

et pour $x = 4$, $y = 0$.

Centre de symétrie :

$$x = 1, \quad y = \frac{1}{2}.$$

4° Les abscisses des points d'intersection sont données par les racines de l'équation :

$$\frac{ax - 2}{x - 2a} = x - a$$

ou

$$x^2 - 4ax + 2(a^2 + 1) = 0. \qquad (3)$$

FIG. 74.

Condition d'existence des racines :

$$\Delta = 4a^2 - 2a^2 - 2 = 2(a^2 - 1) \geqslant 0$$

pour $a < -1$ ou $a > 1$.

C'est la condition pour que la fonction (1) soit décroissante.

Le produit des racines de (3) est toujours positif, les racines sont donc toutes deux positives si $a > 1$ et négatives si $a < -1$.

Cas limites. — 1° $a = +1$. La courbe (1) se réduit à ses deux asymptotes $y = 1$, $x = 2$.

L'équation aux abscisses devient :

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \text{ou} \quad (x - 2)^2 = 0 \; ; \text{ soit } x = 2.$$

Il y a une racine double. La droite $y = x - 1$ passe par le point de concours des asymptotes.

2° $a = -1$. La courbe (1) se réduit à ses deux asymptotes

$$y = -1 \; ; \quad x = -2.$$

L'équation aux abscisses devient :

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \text{ ou } (x + 2)^2 = 0 \; ; \text{ soit } x = -2.$$

Il y a une racine double. La droite $y = x + 1$ passe par le point de concours des asymptotes.

§ IV. INÉQUATIONS A DEUX INCONNUES.

193. — Nous avons démontré (n° 118) que *la droite divise le plan en deux régions* telles que les coordonnées des points de chaque région font prendre à l'expression $ax + by + c$ des signes différents.

Il en est de même d'une courbe quelconque

$$y = f(x) \text{ ou } f(x, y) = 0.$$

Ainsi par exemple le cercle d'équation

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

détermine dans le plan une première région intérieure au cercle et une deuxième extérieure.

Si on prend un point quelconque dans la région intérieure par exemple les points (0, 0), (0, 1) ; (— 1, + 1), on voit que l'expression $x^2 + y^2 - 4$ prend successivement les valeurs — 4, — 3, — 2. Cette expression prend une valeur négative pour les coordonnées de tous les points intérieurs au cercle. Nous dirons que c'est la **région négative.**

Au contraire prenons des points extérieurs au cercle, par exemple

$$(0, 3) \quad (-3, 1) \quad (3, 3),$$

l'expression $x^2 + y^2 - 4$ prend les valeurs 5, 6, 14.

La portion du plan extérieure au cercle est dite **région positive.**

De même la parabole $y - x^2 = 0$ détermine une **région positive** : celle qui contient le point E(0, 2) ; et une **région négative** : celle que renferme le point I (2, 0) (fig. 76).

194. APPLICATIONS. — 1° *Résoudre graphiquement l'inéquation*

$$x^2 + y^2 - 4 > 0.$$

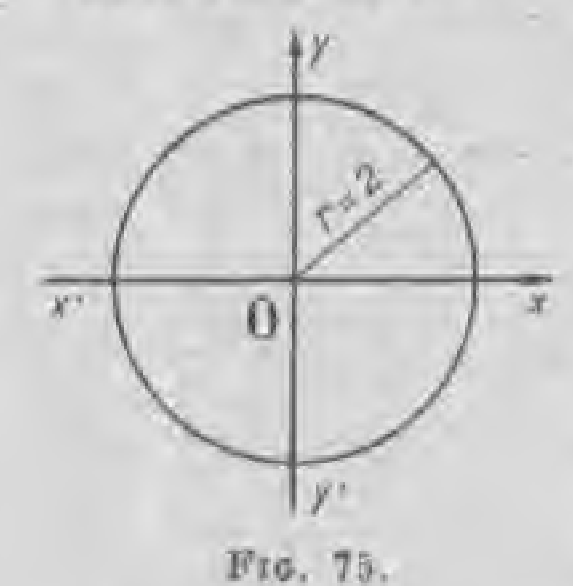


FIG. 75.

Construisons le cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 - 4 = 0 ;$$

il a pour centre le point O (origine des coordonnées) et pour rayon $r = 2$. En procédant comme il a été fait au n° 193, on vérifierait facilement que le premier membre de l'inéquation est positif quand on remplace x et y par les coordonnées d'un point extérieur au cercle ; négatif quand on les remplace par les coordonnées d'un point intérieur.

L'inéquation est donc vérifiée par tout système de valeurs x et y représentant les coordonnées d'un point extérieur au cercle.

2° *Résoudre graphiquement l'inéquation*

$$y - x^2 < 0.$$

La courbe $y - x^2 = 0$ est une parabole (fig. 76). L'inéquation donnée est vérifiée par les coordonnées de tout point extérieur à cette courbe. Pour le point I(2, 0), par exemple, on a :

$$0 - 4 < 0.$$

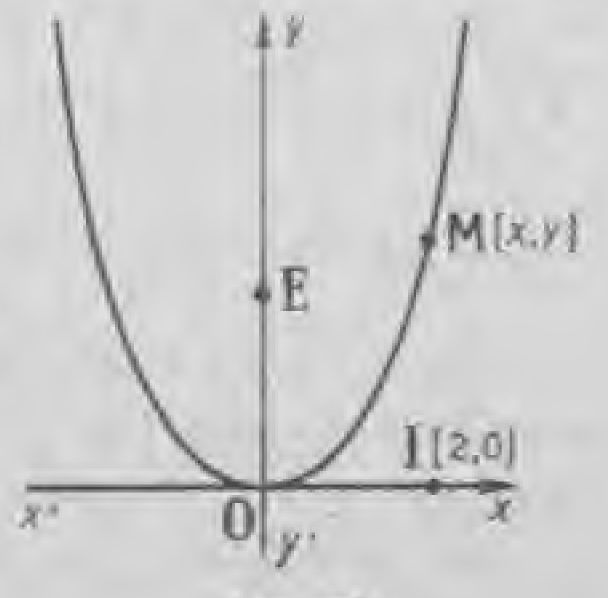


FIG. 76.

3° *Résoudre graphiquement le système*

$$3x + y - 3 < 0 \qquad (1)$$
$$x^2 + y^2 - 4 < 0 \qquad (2)$$
$$y - x^2 > 0. \qquad (3)$$

Pour résoudre ce système, construisons les courbes qui ont pour équations :

$$3x + y - 3 = 0, \quad x^2 + y^2 - 4 = 0, \quad y - x^2 = 0.$$

La première est la droite EF ; la deuxième, le cercle de centre O ; la troisième, la parabole DOH (fig. 77).

Les points dont les coordonnées vérifient les inéquations (1), (2), (3) sont situés respectivement : 1° à gauche de la droite ; 2° à l'intérieur du cercle, 3° à l'intérieur de la parabole.

Le système donné est donc vérifié par les coordonnées de tout point situé dans la région BOCA non couverte de hachures.

4° *Résoudre graphiquement l'inéquation*

$$(3x + y - 3)(x^2 + y^2 - 4)(y - x^2) > 0. \qquad (1)$$

On pourrait chercher les signes de chacun des facteurs de (1) dans

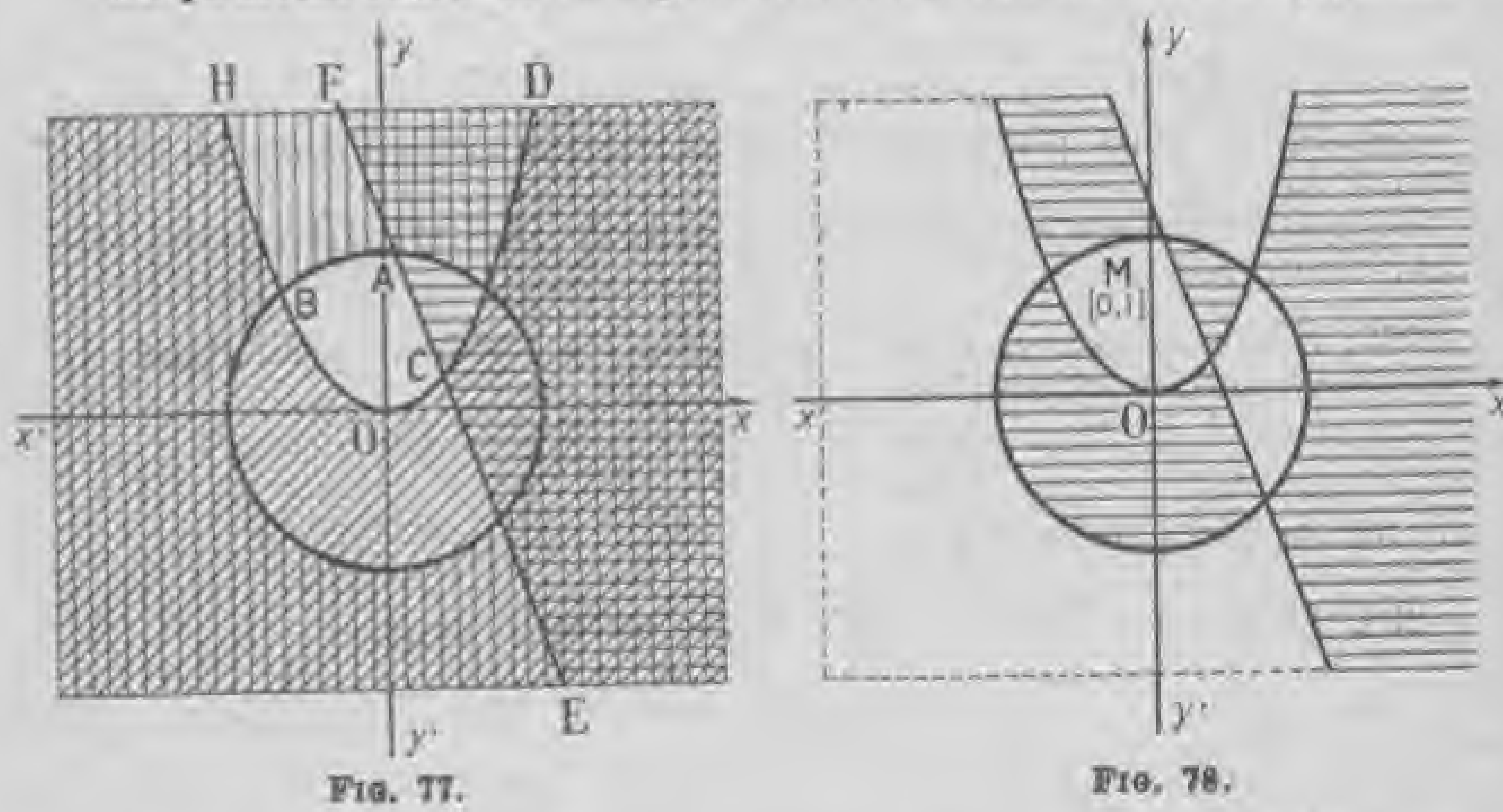


FIG. 77.

FIG. 78.

les régions respectives déterminées par la courbe dont on obtient l'équation en égalant ce facteur à zéro.

En remarquant que chaque facteur de (1) change de signe quand e point M(x, y) traverse une des courbes de la (fig. 78), il suffit de connaître le signe du premier membre de (1) dans l'une des régions pour en déduire celui qu'il prend dans chacune des autres.

Pour le point M(0, 1) on a : $(-2)(-3).1 = 6 > 0,$

et de proche en proche on détermine les régions du plan satisfaisant à (1).

Ce sont les régions non hachurées de la figure 78.

APPLICATIONS DES VARIATIONS DE FONCTIONS

Intersection de deux courbes. Famille de courbes.

989. Determiner les points d'intersection de la courbe

$$y = x^2 - 5x + 6$$

avec les droites
$$y - x - 1 = 0,$$
$$y + 9x - 2 = 0,$$
$$y = 1 - 2x.$$

990. Discuter l'existence des points d'intersection de la courbe

$$y = x^2 - 3x + 2$$

avec la droite $y = mx - 1$

suivant les valeurs de m.

991. Trouver l'équation de la tangente à la courbe

$$y = 3x^2 - 2x - 5$$

issue du point $A(1, -2)$.

992. Construire sur un même graphique les courbes représentatives des variations des fonctions

$$y = 3x^2 - 5x + 2,$$

et
$$y = -x^2 + 4x - 3.$$

Déterminer leurs points d'intersection A et B. Écrire l'équation de la droite AB.

Déterminer l'équation des tangentes à chacune de ces courbes parallèles à la droite AB.

993. Construire sur un même graphique les courbes représentant les variations des fonctions

$$y = 2x^2 - 6x + 3$$

et
$$y = x^2 - 2x - 1.$$

et trouver leur point commun.

994. Déterminer les points d'intersection de la courbe

$$y = \frac{2x - 5}{x + 1}$$

avec les droites
$$4y - x + 2 = 0,$$
$$4y - 7x + 13 = 0,$$
$$4y - 7x + 10 = 0.$$

995. Discuter suivant les valeurs de m l'existence des points d'intersection de la fonction

$$y = \frac{2x + 1}{x - 1}$$

avec la droite $y = mx$ issue de l'origine.

996. On donne la droite variable

$$(\lambda + 1)x - \lambda y + \lambda + 3 = 0$$

et la fonction
$$y = \frac{x + 1}{x - 2}.$$

Discuter le nombre des points d'intersection de la droite et de la courbe et déterminer suivant les valeurs de λ le signe des abscisses des points d'intersection.

997. Trouver l'équation de la tangente à la courbe

$$y = \frac{2x + 1}{x + 3}$$

de coefficient angulaire $5/4$.

998. Trouver l'équation de la tangente à la courbe

$$y = \frac{x - 2}{x + 3}$$

issue du point $A(1, 3)$.

999. On considère l'expression

$$m(x + y) - xy = 2m.$$

1° Calculer y en fonction de m et de x. Discussion.

2° Représenter graphiquement les variations de la fonction y obtenue quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$, lorsque $m = 1$.

3° Calculer x et y connaissant m, sachant que :

$$m(x + y) - xy = 2m,$$
$$xy = m^2.$$

4° Interprétrer graphiquement la solution de la troisième question de ce problème. (Dijon.)

1000. Représenter graphiquement, par rapport à deux axes rectangulaires, les variations des fonctions :

$$y = \frac{x + 1}{x - 1}, \qquad y = \frac{l(x - 1)}{x + 1}.$$

Les courbes représentatives peuvent se couper en deux points A et B. Calculer les coordonnées de A et de B et discuter leur existence suivant les valeurs de l.

Former l'équation de la droite AB et montrer que cette droite passe par un point indépendant de la valeur de l.

Quelles valeurs faut-il donner à l pour que les coordonnées de A et de B soient des nombres rationnels ?

1001. On donne le trinôme :

$$x^2 - 2\lambda x - (1 - \lambda^2),$$

et à chaque valeur de x correspond pour ce trinôme une valeur y.

Lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$, la variation du trinôme peut donc être représentée par la courbe :

$$y = x^2 - 2\lambda x - (1 - \lambda^2).$$

Nous appelons C cette courbe représentative : à chaque valeur de λ correspond une courbe C_λ.

1° Quelle est la forme de ces courbes ?

2° Coupent-elles toujours l'axe des x, quelle que soit la valeur de λ ?

3° Construire la courbe qui représente y pour la valeur particulière $\lambda = 0$ (c'est-à-dire la courbe C_0).

4° Ces courbes C_λ ont un minimum. Quelles sont les coordonnées de ce minimum ? Comment se déplace ce minimum quand λ varie ?

1002. On considère la fonction

$$y = f(x) = \frac{mx - 4m + 3}{x - m}$$

où m est un paramètre donné. Soit C_m la courbe représentant cette fonction.

1° Trouver les asymptotes de C_m. Ces asymptotes se coupent en un point dont on demande le lieu quand m varie.

2° Discuter suivant les valeurs de m le sens de variation de $f(x)$.

3° Construire les courbes C_m ? Montrer que ces courbes ont un axe de symétrie commun.

4° Soient α et β deux valeurs distinctes de m. Quelles sont les valeurs de x qui rendent égales les deux valeurs de $f(x)$ correspondantes ? Valeurs communes à ces deux fonctions.

Étant donnée la courbe $C_0(m = 0)$, montrer que la courbe $C_4(m = 4)$ lui est égale et que les fonctions $f(x)$ correspondantes varient dans le même sens.

N'existe-t-il que la valeur $m = 4$ donnant les mêmes propriétés ?

1003. On donne le trinôme du second degré

$$y = x^2 - 4x + 1.$$

1° Construire la courbe représentative.

2° Par un point A de l'axe Oy, d'ordonnée OA $= a$, on mène une droite parallèle à la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$. Écrire l'équation de cette droite.

3° Cette droite coupe la courbe en deux points dont on demande les abscisses. Discuter la nature et le signe des abscisses des points d'intersection suivant les valeurs de a. Déduire de cette discussion qu'on peut mener à la courbe une tangente parallèle à la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$. Donner l'équation de cette tangente.

4° Quelles valeurs peut-on donner à a, pour que, par le point A, on puisse mener une tangente à la courbe ? Discuter. Examiner en particulier le cas où $a = 1$ et calculer alors le coefficient angulaire de la tangente passant par A.

1004. 1° Discuter, suivant les valeurs de a, l'existence et le signe des racines de l'équation

$$(a - 2)x^2 - 2x + (a - 2) = 0.$$

2° On considère la fonction

$$y = (a - 2)x^2 - 2x + (a - 2).$$

Déterminer a de manière que cette fonction présente un minimum situé sur la droite $y = 3x$.

Courbe représentative de la fonction pour cette valeur de a.

3° a ayant la valeur précédente, on coupe la courbe (C) obtenue par une droite (D) parallèle à la droite $y = 3x$ et rencontrant l'axe des y au point M d'ordonnée m.

Discuter, selon les valeurs de m, le nombre des points d'intersection de (C) et de (D). (Grenoble.)

1005. 1° Variation de la fonction

$$y_1 = \frac{x}{x - 1};$$

représentation graphique. Variation de la fonction

$$y_2 = -2x + 6;$$

représentation graphique. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de ces deux lignes, supposées construites relativement au même système d'axes de coordonnées Ox, Oy.

2° A quelle condition doit satisfaire la constante a pour que la figure représentative de la fonction $y_2 = -2x + a$ (supposée toujours construite relativement au même système d'axes Ox, Oy) rencontre la ligne représentative de la fonction y_1 en deux points ? (On appellera ces deux points M et M'.)

3° Dans le cas où cette condition est satisfaite, trouver en fonction de a les coordonnées du milieu I du segment MM'. Démontrer que lorsque a varie I reste sur une droite ; calculer les coordonnées des points d'intersection de cette droite avec les deux axes Ox, Oy. (Caen.)

1006. On considère le trinôme

$$y = x^2 - 2kx + k^2 + k + 1.$$

1° Déterminer k de façon que ce trinôme ait un minimum égal à -4, puis construire la courbe représentative des variations du trinôme ainsi obtenu.

2° On coupe cette courbe par une droite passant par l'origine et ayant pour équation $y = mx$.

Étudier l'équation qui donne les abscisses des points de rencontre et déduire de cette étude qu'on peut mener à la courbe deux tangentes par l'origine. Donner les équations de ces tangentes.

3° Soient M' et M'' les points de rencontre de la droite considérée et de la courbe. Calculer les coordonnées du milieu P du segment M'M''. Peut-on déduire des valeurs obtenues la ligne que décrit le point P quand m varie ? (Martinique.)

1007. Démontrer que les courbes représentatives de la fonction

$$y = x^2(3m + 1) - x(7m + 5) + 2(m + 2).$$

passent par deux points fixes quand m varie.

1008. Démontrer que les courbes

$$y = \frac{mx - 4}{x - m}$$

passent par deux points fixes quand m varie.

Inégalités. — Régions.

Résoudre graphiquement les inégalités :

1009. $-2 < x^2 - 5x + 4 < 6.$

1010. $3x^2 - 7x + 8 > 5.$

1011. $x^2 + 5y - 3x + 4 > 0.$

Résoudre les systèmes suivant et indiquer le nombre de solutions suivant les valeurs de h.

1012. $3x^2 - 5x + 2 = h$
$-2 < x < 4.$

1013. $$-2x^2 + 3x - 1 = h$$
$$-1 < x < 5.$$

1014. $$3x^2 - 8x + 4 = h$$
$$x > 3.$$

1015. Soient C les courbes qui représentent les variations du trinôme
$$y = x^2 + mx + m,$$
où m est un paramètre variable d'une courbe à l'autre.

1° Quelles valeurs faut-il donner à m pour que les courbes C correspondantes coupent l'axe des x ? Pour quelles valeurs de m les courbes C correspondantes touchent-elles Ox ?

2° Montrer que toutes les courbes C sont égales.

3° Montrer que, quel que soit m, les courbes C passent par un point fixe.

4° Montrer qu'on peut, en général, déterminer m de façon que la courbe C passe par un point donné de coordonnées x' et y'.

5° Peut-on déterminer m de telle sorte que la courbe C soit tangente à la droite $y = h$? Discuter. (Sénégal.)

1016. Soit un triangle équilatéral ABC de côté a. On le coupe par une parallèle DE à la base BC et on projette D en F sur BC. On pose
$$AD = x.$$

1° Exprimer, en fonction de a et de x, les volumes des solides engendrés par les surfaces du triangle BFD et du trapèze CFDE, dans leur révolution autour du côté BC.

2° Étudier la variation du rapport de ces deux volumes quand D parcourt le côté AB, de A en B, et la représenter graphiquement.

3° Calculer x de manière que ce rapport prenne une valeur donnée k. Discuter en se servant du graphique précédent. (Alexandrie.)

1017. Étudier la variation de la fonction
$$y = |3x^2 - 8x + 4|$$
et tracer la courbe représentative. Discuter d'après ce graphique l'existence des racines de l'équation $|3x^2 - 8x + 4| = h$.

1018. On donne un cercle de rayon R et le triangle équilatéral inscrit ABC. En B et C on mène les tangentes au cercle qui se coupent en AT. La figure ainsi formée engendre en tournant autour de AT un volume. On considère le solide compris entre la sphère et le cône et on le coupe par un plan perpendiculaire à AT en M.

Étudier la variation de l'aire de la section ainsi obtenue quand $OM = x$ varie dans les limites de réalisé de la section.

1019. On donne un triangle OAB rectangle en O. $OA = a$, $OB = 3a$. Par un point M quelconque de AB, on mène MP et MQ respectivement perpendiculaires à OA et OB. On pose $OP = x$.

Évaluer l'aire S du rectangle OPMQ en fonction de a et de x.

Étudier sa variation quand x varie entre 0 et a.

En déduire combien il existe de positions de M sur AB donnant pour S une valeur donnée h^2.

1020. On considère un triangle équilatéral ABC de hauteur h. Une parallèle au côté BC à la distance x du sommet A (du côté de BC) coupe

les côtés AB et AC ou leurs prolongements en E et F ; on porte sur EF à l'extérieur du triangle les deux segments EG et FH égaux à AE.

Exprimer en fonction de h et x l'aire du trapèze BCHG ? On étudiera deux cas suivant que x est inférieur ou supérieur à h.

N'est-il pas possible de représenter les deux expressions de l'aire ainsi trouvée par une seule fonction. On en étudiera la variation et de l'étude ainsi faite on déduira le nombre des valeurs de x qui donnent une valeur k à l'aire du trapèze.

1021. Déterminer les signes des racines de l'équation du second degré
$$(\beta - \alpha)x^2 - 2\beta x + \alpha + \beta + 1 = 0,$$
dans laquelle α et β sont les coordonnées d'un point $M(\alpha, \beta)$ du plan des coordonnées xOy.

1022. Même question pour l'équation
$$x^2 - 2(\alpha + 1)x + 2\alpha^2 + \alpha + \beta = 0.$$

1023. 1° Étudier les fonctions
$$Y = \frac{1 - x^2}{2}, \quad y = x - x^2.$$

Montrer que, pour chaque valeur de x on a $Y > y$ sauf une exception, que l'on déterminera, pour laquelle on a $Y = y$. Utiliser ces résultats pour le tracé sur une même figure des courbes représentant les variations des fonctions.

2° Dans quelle région du plan doit se trouver le point de coordonnées $x = a$, $y = b$, pour que l'on ait
$$b < \frac{1 - a^2}{2}.$$

3° a, b étant deux nombres donnés, peut-on donner à la constante m une valeur telle que la fonction
$$-\frac{1 + m^2}{2}x^2 + mx,$$
prenne la valeur b pour $x = a$? Y a-t-il plusieurs valeurs possibles pour m^2 ? Dans le cas où il y en a deux, montrer que la courbe représentative correspondant à une des deux (et à une seule des deux) n'a aucun point d'abscisse comprise entre 0 et a en commun avec la courbe
$$Y = \frac{1 - x^2}{2}.$$

CHAPITRE XV

MOUVEMENT RECTILIGNE D'UN POINT

195. Considérons un axe orienté Ox et sur cet axe un point M mobile.

La position du point M sur l'axe dépend du temps et elle est parfaitement définie si l'on connaît l'abscisse $\overline{OM} = x$ de ce point.

Le temps se compte à partir d'un certain instant que l'on appelle l'instant initial, les temps qui précèdent cet instant initial sont considérés comme négatifs, ceux qui le suivent comme positifs.

Cette abscisse est donc une fonction du temps et la relation

$$x = f(t)$$

qui permet de calculer cette abscisse à chaque instant est appelée **l'équation horaire du mouvement.**

La droite Ox parcourue par le point M est sa **trajectoire.**

§ *I. MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME.*

196. ***Un mouvement rectiligne est dit uniforme si, le mobile se déplaçant toujours dans le même sens, les espaces parcourus sont proportionnels aux temps employés à les parcourir.***

Soit M un point mobile animé d'un mouvement rectiligne uniforme, sa position à chaque instant est définie par son abscisse

$$\overline{OM} = x.$$

A l'instant t_1 le mobile est en M_1 tel que $\overline{OM_1} = x_1$,

A l'instant t_2, le mobile est en M_2, tel que $\overline{OM_2} = x_2$.

Pendant le temps $t_2 - t_1$, le mobile a donc parcouru l'espace $\overline{M_1M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1} = x_2 - x_1$.

Fig. 79.

Le mouvement sera uniforme si le rapport

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = a$$

est constant.

Le signe de ce rapport indique dans quel sens le mobile se déplace ; en effet, supposons $t_2 > t_1$, si a est positif $x_2 > x_1$ et le mobile se déplace dans le sens Ox des abscisses croissantes.

Si $a < 0$, $x_2 < x_1$ et le mobile se déplace dans le sens des abscisses décroissantes.

La valeur absolue de a indique avec quelle rapidité s'effectue le mouvement.

On appelle a la vitesse algébrique du mouvement uniforme.

197. **Équation horaire d'un mouvement rectiligne uniforme.**

Choisissons les instants t_1 et t_2 de telle manière que t_1 coïncide avec l'instant initial $t_1 = 0$ et $x_1 = x_0$, et que t_2 soit un instant quelconque t, $x_2 = x$.

Le rapport (1) devient

$$\frac{x - x_0}{t} = a\ ;$$

d'où :

$$x = at + x_0.$$

Fig. 80.

Dans un mouvement rectiligne uniforme, l'abscisse du point mobile est une fonction linéaire du temps.

Réciproquement tout mouvement rectiligne dont l'équation horaire est une fonction linéaire du temps est uniforme.

En effet, soit $x = at + x_0$,

une équation linéaire représentant en fonction du temps l'abscisse x d'un point mobile M sur une droite orientée.

A deux instants quelconques t_1 et t_2, le mobile sera en M_1 et M_2 tels que :

$$\overline{OM_1} = x_1 = at_1 + x_0,$$
$$\overline{OM_2} = x_2 = at_2 + x_0,$$
$$\overline{M_1M_2} = x_2 - x_1 = a(t_2 - t_1)$$

et :

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = a. = C^{te}.$$

Les espaces parcourus étant proportionnels aux temps employés à les parcourir, le mouvement est uniforme.

§ *II. MOUVEMENT UNIFORMÉMENT VARIÉ.*

198. ***Un mouvement est dit uniformément varié lorsque son équation horaire est du second degré par rapport au temps.***

$$x = at^2 + bt + c.$$

L'étude de la variation de l'espace en fonction du temps revient l'étude d'un trinôme du second degré.

Si $a > 0$, x diminue d'abord de $+\infty$ à $\frac{4ac-b^2}{4a}$ quand t varie de $-\infty$ à $-\frac{b}{2a}$, passe à l'instant $-\frac{b}{2a}$ par le minimum $\frac{4ac-b^2}{4a}$ puis croît jusqu'à $+\infty$ lorsque x varie de $-\frac{b}{2a}$ à $+\infty$.

Au point de vue mouvement, le mobile part de l'infini à droite, et se dirige dans le sens négatif, il arrive à l'instant $t = -\frac{b}{2a}$ au point A d'abscisse $\frac{4ac-b^2}{4a}$, s'arrête en ce point et repart dans le sens positif et s'éloigne indéfiniment.

On interpréterait d'une façon analogue le cas où $a < 0$.

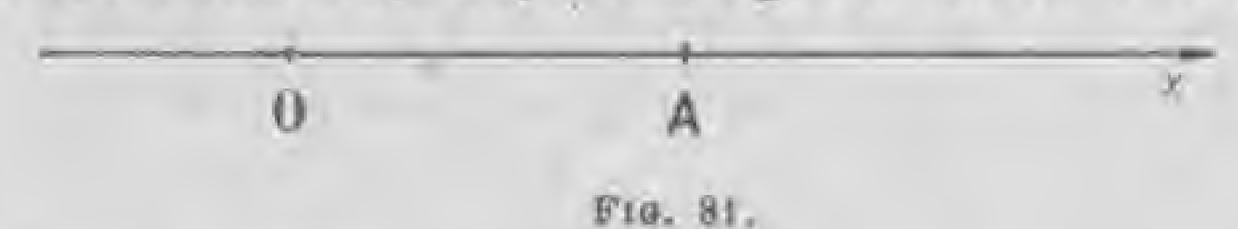


Fig. 81.

199. Vitesse moyenne.

Considérons deux positions M_1 et M_2 du mobile aux instants t_1 et t_2, positions définies par leurs abscisses respectives x_1 et x_2.

$$x_1 = at_1^2 + bt_1 + c,$$
$$x_2 = at_2^2 + bt_2 + c.$$

Pendant l'intervalle de temps $t_2 - t_1$, le mobile a parcouru l'espace $\overline{M_1M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1} = x_2 - x_1$

Par définition, la vitesse moyenne du mobile pendant l'espace de temps $t_2 - t_1$ *est la vitesse d'un mobile qui irait de* M_1 *en* M_2 *pendant le temps* $t_2 - t_1$ *d'un mouvement uniforme.*

0 M₁ M₂ x

Fig. 82.

Elle est donc égale à l'espace parcouru divisé par le temps employé à le parcourir

$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{a(t_2^2 - t_1^2) + b(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1}$$
$$v_m = a(t_2 + t_1) + b.$$

200. Vitesse à l'instant t.

Prenons pour instants t_2 et t_1, les instants très voisins $t_1 = t$ instant quelconque, et $t_2 = t + h$.

$$t_2 - t_1 = h \text{ et } t_2 + t_1 = 2t + h.$$

La vitesse moyenne pendant l'intervalle de temps h est d'après ce qui précède :

$$v_m = a(2t + h) + b.$$

Si l'on fait tendre h vers zéro, la vitesse moyenne tend vers une valeur limite qui est, par définition, la vitesse à l'instant t :

$$v = \lim v_m = 2at + b.$$

Remarque. — On voit aisément que la vitesse à l'instant t n'est autre que la dérivée de la fonction espace pour cette valeur de la variable t.

Accélération. — Soient v_1 et v_2 les vitesses du mobile M aux instants t_1 et t_2

$$v_1 = 2at_1 + b$$
$$v_2 = 2at_2 + b.$$

L'accroissement de vitesse pendant l'espace de temps $t_2 - t_1$ est :

$$v_2 - v_1 = 2a(t_2 - t_1).$$

Le rapport de l'accroissement de vitesse à l'accroissement du temps est :

$$\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = 2a = C^{te}$$

Ce rapport constant est dit l'accélération du point M.

Problème. — *Déterminer l'équation horaire du mouvement d'un mobile animé d'un mouvement uniformément varié connaissant son accélération* j *et sa vitesse à l'instant initial* v_0.

D'après la définition, l'équation horaire d'un mouvement uniformément varié est de la forme

$$x = at^2 + bt + c.$$

Sa vitesse à l'instant t est donnée par la dérivée

$$v = 2at + b.$$

Comme elle doit être égale à v_0 pour $t = 0$, on en déduit

$$b = v_0.$$

L'accélération égale $2a$; comme d'autre part elle doit être égale à j, on aura

$$2a = j \text{ ou } a = \frac{j}{2}.$$

A l'instant initial $x = x_0 = c$.

L'équation du mouvement ainsi défini est donc :

$$x = \frac{1}{2}jt^2 + v_0t + x_0.$$

201. Diagramme. — On appelle diagrammes les courbes représentatives des variations de la fonction espace et de la fonction vitesse dans un mouvement quelconque. Dans un mouvement

uniformément varié, l'espace étant une fonction du second degré du temps, le diagramme des espaces sera une parabole.

La fonction vitesse étant une fonction du premier degré du temps, le diagramme des vitesses sera une droite.

Si l'équation du mouvement est donnée comme plus haut par ses circonstances initiales

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$$

la vitesse sera donnée par

$$v = gt + v_0.$$

Le digramme des vitesses sera la droite D qui coupe Ox au point $(0\ v_0)$ et l'axe Ot au point $\left(-\frac{v_0}{g}, 0\right)$.

Le diagramme des espaces sera la parabole P qui passe par un minimum $x = x_0 - \frac{v_0^2}{2g}$ pour $t = -\frac{v_0}{g}$ et coupe l'axe Ox au point $(0, x_0)$.

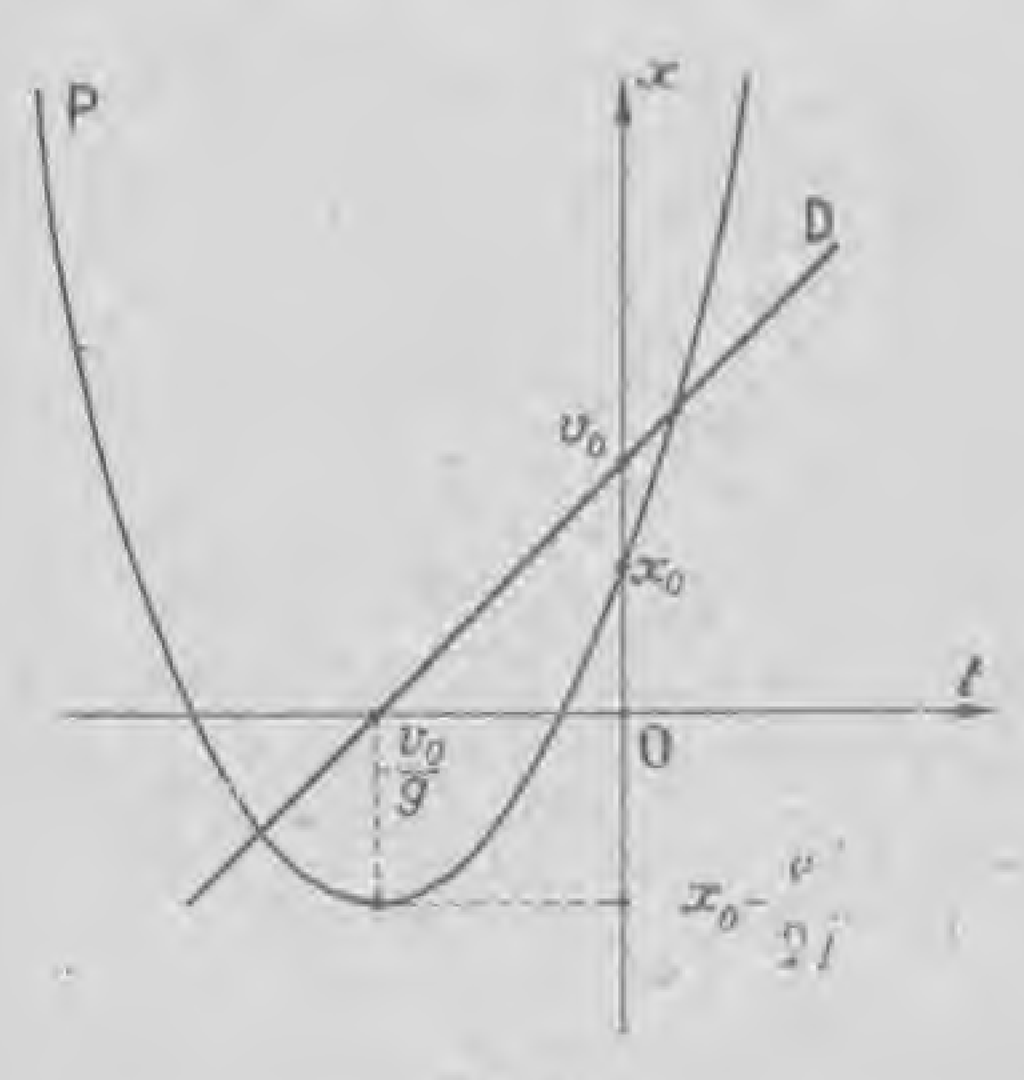


Fig. 83.

Exemple. — *Un mobile part d'un point* A *situé à 5 m de l'origine à l'instant initial ; il est animé d'une accélération de 4 m/sec² constante et passe à l'origine une seconde après son départ. Trouver son équation horaire et tracer les diagrammes des espaces et des vitesses de ce mouvement.*

D'après les formules précédentes,

$$j = 4 \text{ et } x_0 = 5$$

l'équation horaire du mouvement est donc de la forme :

$$x = 2t^2 + v_0t + 5$$

pour que x s'annule pour $t = 1$, il faut

$$v_0 = -7.$$

ce qui donne pour équation horaire de ce mouvement :

$$x = 2t^2 - 7t + 5.$$

Sa vitesse sera donnée par :

$$v = 4t - 7.$$

La représentation graphique est immédiate (fig. 84).

Rencontre de deux mobiles.

Pour que deux mobiles se rencontrent, il faut que leurs abscisses soient les mêmes au même instant, c'est-à-dire que les abscisses prennent une même valeur pour une même valeur de t.

On obtiendra donc l'instant de leur rencontre en égalant les deux fonctions de t qui donnent ces abscisses.

La valeur de t trouvée substituée dans l'une ou l'autre des fonctions donnera la position du point de rencontre.

Exemple. — Trouver les époques et les positions des points de rencontre de deux mobiles dont les équations horaires sont :

$$x = 3t - 2$$

et $x = -2t^2 + 5t + 2$;

Fig. 84.

en égalant les équations on trouve $2t^2 - 2t - 4 = 0$.

d'où : $t_1 = -1$ et $t_2 = 2$

les deux mobiles se rencontrent donc deux fois :

une 1re fois pour $t = -1$ au point d'abscisse $x = -5$

la seconde fois au temps $t = 2$ au point d'abscisse $x = 4$.

EXERCICES SUR LE MOUVEMENT UNIFORME ET SUR LE MOUVEMENT UNIFORMÉMENT VARIÉ

Étudier les mouvements donnés par les équations horaires suivantes et construire leurs diagrammes :

1024. $x = 3t - 5.$

1025. $x = -2t + 1.$

1026. $x = t^2 - 3t + 2.$

1027. $x = -2t^2 + 3t + 5.$

1028. $x = \frac{1}{2}t^2 - 5t - 1.$

1029. $x = 4t - t^2.$

1030. Un mobile se déplace d'un mouvement uniforme le long d'une droite Ox. A l'instant $t = -2$, il est en $A(\overline{OA} = 5)$; à l'instant $t = 3$, il est en $B\left(\overline{OB} = -2\frac{1}{2}\right)$. Déterminer son équation horaire et construire le diagramme de ce mouvement.

1031. Un mobile se déplace d'un mouvement uniforme de vitesse 3 m/sec. A l'instant $t = 3$, il est au point $A(\overline{OA} = 5)$. Déterminer son équation horaire et construire son diagramme.

1032. Deux mobiles parcourent une droite d'un mouvement uniforme, l'un avec une vitesse de 4 m/sec ; l'autre avec une vitesse de 3 m/sec, mais en sens contraire du précédent. A quel instant et où se rencontrent-ils, si à l'instant initial, le premier est en $A(\overline{OA} = -12)$, le second en $B(\overline{OB} = 15)$. Évaluer la distance des deux mobiles et étudier sa variation au cours du temps.

1033. Deux scouts, Guy et Alain, veulent effectuer un trajet de 115 km, mais ne disposent d'une seule bicyclette. Guy fait 5 km/h à pied, et 18 km à bicyclette ; Alain, au contraire, fait 6 km/h à pied, mais 16 seulement à bicyclette. Ils partent ensemble : Guy à pied, Alain à vélo. A quel endroit de la route le premier devra déposer la bicyclette pour son camarade afin qu'ils arrivent ensemble à destination.
Tracer le diagramme de leurs mouvements.

1034. Deux mobiles font la navette entre deux points A et B distants de 120 m, l'un avec une vitesse de 6 m/sec, l'autre avec une vitesse de 4 m/sec. En supposant qu'ils partent ensemble de A et de B à l'instant initial, trouver les époques et les positions de leurs cinq premières rencontres.

1035. Un mobile parcourt une droite Ox d'un mouvement uniformément varié, d'accélération 3 m/sec². Sa position itnitiale est $A(\overline{OA} = 5)$ avec une vitesse de 4 m/sec. Trouver l'équation horaire de ce mouvement.

1036. Un mobile parcourt une droite d'un mouvement uniformément varié d'accélération 4 m/sec² dans le sens négatif. Sa vitesse s'annule en A (OA = 8) au temps $t = 2$. Équation horaire et diagramme de ce mouvement.

1037. Déterminer le mouvement uniformément varié défini par les conditions suivantes :

Pour $t = -1$,	$x = 15.$
Pour $t = 1$	$x = -1.$
Pour $t = 3$	$x = 7.$

1038. Un cycliste part du sommet d'une côte avec une vitesse nulle ; il effectue une descente de 450 mètres avec une accélération moyenne de 1 m/sec². Quel chemin pourra-t-il effectuer en vertu de la vitesse acquise sur une pente où l'accélération du mouvement retardé serait de 4 m/sec² ?

1039. Un train part d'une station A en direction d'une station B distante de 120 km. Il part d'un mouvement uniformément varié sur une distance de 5 km, atteint alors une vitesse de 80 km/h, puis, arrivé à 2 km de B, ralentit uniformément. Tracer le diagramme de ce mouvement et préciser les particularités de chaque phase : durée, accélération.

1040. Deux mobiles M et N se meuvent sur un même axe, le premier d'un mouvement uniforme, d'équation horaire $x = 3t - 2$; l'autre, d'un mouvement uniformément varié d'équation horaire $4t^2 - 5t + 1$. Trouver les époques et les positions de leurs rencontres avec leurs vitesses respectives à ces instants.

1041. Deux mobiles M et N parcourent une même droite, l'un d'un mouvement uniforme de vitesse constante $v = 6$ et partant à l'instant initial du point $A(\overline{OA} = -3)$), l'autre animé d'un mouvement uniformément varié d'accélération = 18 m/sec² et dont la vitesse s'annule au temps $t = 1/3$ à l'origine. Déterminer la rencontre de ces deux mobiles ; qu'offre-t-elle de particulier ?

TRIGONOMÉTRIE

§ I. EXTENSION DE LA NOTION D'ARC ET D'ANGLE.

1. CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE. — ***On appelle cercle trigonométrique un cercle de rayon unité sur lequel on a choisi une origine et un sens positif de parcours.***

Le sens regardé comme sens positif est tel qu'un observateur placé au centre O du cercle perpendiculairement au plan de celui-ci, verrait un mobile décrivant le cercle dans le sens positif, aller de sa droite vers sa gauche, c'est-à-dire dans le sens contraire de celui du mouvement des aiguilles d'une montre. Ce sens est appelé **sens direct** ; le sens opposé est appelé **sens rétrograde.**



Fig. 1.

Si l'on mène deux axes rectangulaires $x'Ox$ et $y'Oy$ (fig. 1) l'axe $x'Ox$ passant par l'origine A et dirigé dans le sens OA, le second $y'Oy$ déduit du premier par une rotation de $+ 90°$ autour de O, on divise le cercle trigonométrique *en quatre quarts ou quadrants* que l'on numérote dans l'ordre où les parcourrait un mobile décrivant le cercle trigonométrique dans le sens positif.

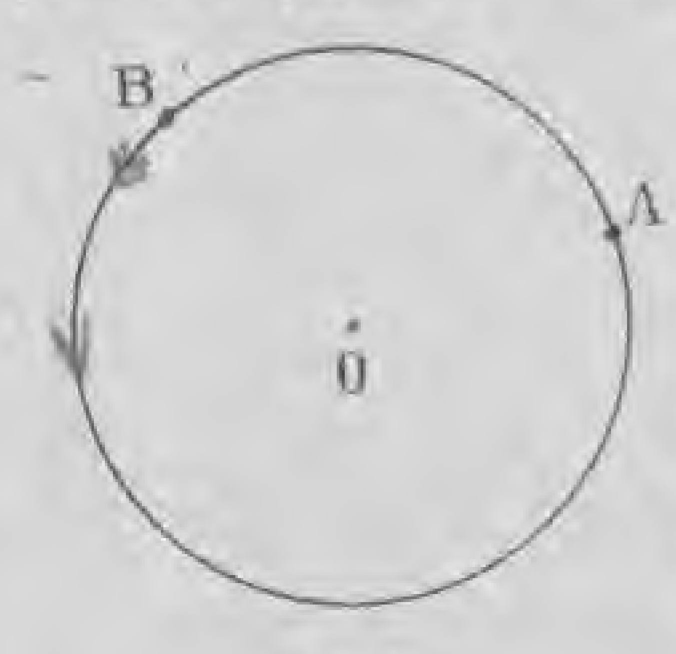


Fig. 2.

2. EXTENSION DE LA NOTION D'ARC.

Soit un mobile M décrivant le cercle trigonométrique et partant d'un point A pour aboutir en B. Il peut s'arrêter en B lors de son premier passage, ou lors d'un passage ultérieur après avoir parcouru le cercle complètement, une, deux..., n fois.

On voit donc qu'il existe une infinité d'arcs ayant pour origine le point A et pour extrémité le point B.

Tous ces arcs peuvent être désignés par le symbole $\overset{\curvearrowright}{AB}$.

La mesure algébrique de cet arc $\overset{\curvearrowright}{AB}$ est un nombre algébrique dont la valeur absolue est la longueur de l'arc AB mesurée avec une unité convenable et dont le signe est + ou — suivant que le mobile qui va de A en B parcourt le cercle dans le sens direct ou dans le sens rétrograde.

Cette mesure algébrique de l'arc $\overset{\curvearrowright}{AB}$ est représentée par le symbole $\overset{\frown}{AB}$.

3. RELATIONS ENTRE LES ARCS DE MÊME ORIGINE ET DE MÊME EXTRÉMITÉ.

Supposons que le mobile M aille de A en B dans le sens positif et s'arrête en B *à son premier passage* ; soit α la longueur exprimée en radians de l'arc ainsi parcouru.

Tout autre arc $\overset{\curvearrowright}{AB}$ parcouru dans le sens positif s'obtiendra en ajoutant à l'arc α un nombre entier de circonférences, soit $k.2\pi$ où k est *un entier positif.*

La mesure algébrique est donnée par

$$\alpha + k.2\pi$$

ou

$$\alpha + 2k\pi.$$

Si l'arc $\overset{\curvearrowright}{AB}$ est décrit dans le sens négatif avec arrêt au *premier passage* en B, sa mesure algébrique est

$$-(2\pi - \alpha) \quad \text{ou} \quad -2\pi + \alpha,$$

les autres arcs décrits dans le sens négatif, s'obtiendront en ajoutant au précédent un nombre entier de circonférences parcourues dans le sens négatif, soit $k'.2\pi$ où k' est un *entier négatif.*

Ils seront donc de la forme

$$-(2\pi - \alpha) + 2k'\pi \quad \text{ou} \quad \alpha + 2(k' - 1)\pi$$

et en posant

$$k' - 1 = k$$

$$\alpha + 2\mathbf{k}\pi.$$

Les arcs $\overset{\curvearrowright}{AB}$ ont pour mesure algébrique

$$\overset{\frown}{\mathbf{AB}} = 2\mathbf{k}\pi + \alpha$$

où k est un entier algébrique (positif, nul ou négatif).

Soient a_1 et a_2 les mesures algébriques de deux arcs de même origine A, de même extrémité B et α celle du plus petit arc positif $\overset{\curvearrowright}{AB}$.

On a :

$$a_1 = 2k_1\pi + \alpha,$$
$$a_2 = 2k_2\pi + \alpha$$

d'où

$$a_1 = a_2 + 2(k_1 - k_2)\pi$$

où $k_1 - k_2$ est encore un entier algébrique.

D'une façon générale :

Tous les arcs $\overset{\frown}{AB}$ de même origine et de même extrémité ont pour mesure algébrique

$$\overset{\frown}{AB} = 2k\pi + a,$$

où a est l'un quelconque de ces arcs et k un entier algébrique[1].

4. RELATIONS ENTRE LES ARCS D'UN MÊME CERCLE.

Considérons sur un cercle orienté différents arcs consécutifs, c'est-à-dire tels que l'origine de l'un quelconque d'entre eux coïncide avec l'extrémité du précédent. Soient $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$.... $\overset{\frown}{DL}$ ces arcs.

Fig. 3.

Si un mobile part de A (fig. 3) décrit le cercle trigonométrique, en parcourant successivement les arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$... $\overset{\frown}{DL}$, il aura évidemment effectué un nombre entier de tours, quand il reviendra en A et l'on pourra écrire :

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \dots + \overset{\frown}{DL} + \overset{\frown}{LA} = 2k\pi\ ;$$

ou :

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \dots \overset{\frown}{DL} = 2k\pi + \overset{\frown}{AL}.$$

C'est la relation de Chasles appliquée aux arcs.

5. EXTENSION DE LA NOTION D'ANGLE.

Soient deux demi-droites concourantes OA et OB et une demi-droite mobile OM. Si l'on fait tourner la demi-droite OM autour de O toujours dans le même sens, de manière qu'elle parte de OA, position origine, pour s'arrêter en OB, soit à son premier passage, soit à un passage ultérieur :

On appelle angle de la demi-droite OA avec la demi-droite OB l'un quelconque des angles ainsi décrits par la demi-droite OM.

On représente ces angles par le symbole $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

1. On écrit équivalemment : $\overset{\frown}{AB} = a + k.2\pi$.
Ce qui marque mieux que les arcs de même origine et de même extrémité diffèrent d'un nombre entier de circonférences.

La mesure algébrique de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est un nombre algébrique dont la valeur absolue est la mesure de l'angle décrit par la demi-droite OM et dont le signe est + ou — suivant que la droite OM tourne dans le sens positif ou dans le sens négatif.

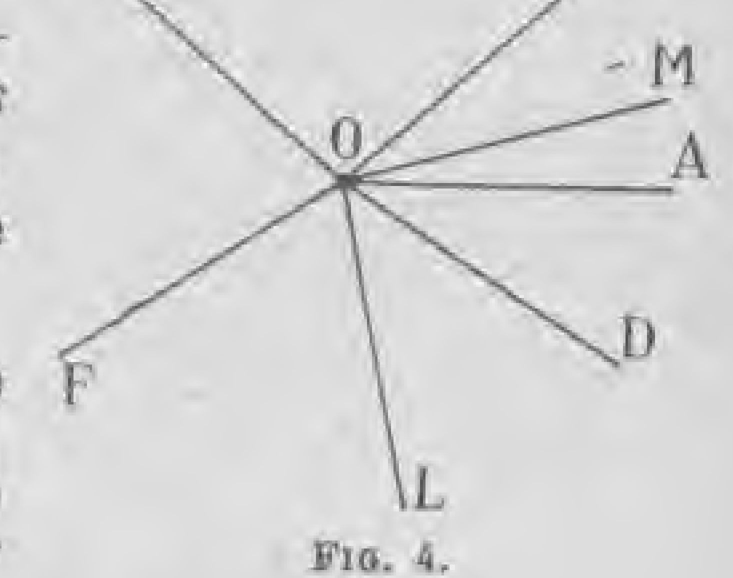


Fig. 4.

Elle est représentée par le symbole $(\overline{OA}, \overline{OB})$ ou $(\widehat{OA, OB})$.

Si α est la mesure algébrique de l'un quelconque des angles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, la mesure algébrique des autres angles $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB})$ est comprise dans l'expression générale :

$$(\overline{OA}, \overline{OB}) = 2k\pi + \alpha.$$

Les angles ayant même mesure que les arcs qu'ils interceptent sur une même circonférence, on peut établir entre les mesures algébriques des angles une relation analogue à la relation de Chasles.

$$(\overline{OA}, \overline{OB}) + (\overline{OB}, \overline{OC}) + \dots + (\overline{OF}, \overline{OL}) + (\overline{OL}, \overline{OA}) = 2k\pi$$

$$\text{ou } (\overline{OA}, \overline{OB}) + (\overline{OB}, \overline{OC}) + \dots + (\overline{OF}, \overline{OL}) = 2k\pi + (\overline{OA}, \overline{OL})$$

Cette formule s'établit immédiatement en remarquant qu'un angle et l'arc qu'il intercepte sur le cercle trigonométrique ont même mesure.

§ *II. RELATIONS ENTRE LES DIFFÉRENTS ARCS DE MÊME ORIGINE.*

6. ARCS DONT LES EXTRÉMITÉS SONT SYMÉTRIQUES PAR RAPPORT A L'AXE Oy OU ARCS SUPPLÉMENTAIRES.

Soient deux arcs $\overset{\frown}{AM}$ et $\overset{\frown}{AM'}$ de mesures algébriques a et a' dont les extrémités M et M′ sont symétriques par rapport à l'axe Oy (fig. 5).

Le point B est milieu de l'arc $\overset{\frown}{MM'}$ et

$$\overset{\frown}{BM'} = -\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{MB}\ ;$$

$$\overset{\frown}{BM'} = \overset{\frown}{BA} + \overset{\frown}{AM'} + 2k_1\pi = -\frac{\pi}{2} + a' + 2k_1\pi\ ;$$

$$\overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{MA} + \overset{\frown}{AB} + 2k_2\pi = -a + \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi\ ;$$

d'où, en égalant et en simplifiant

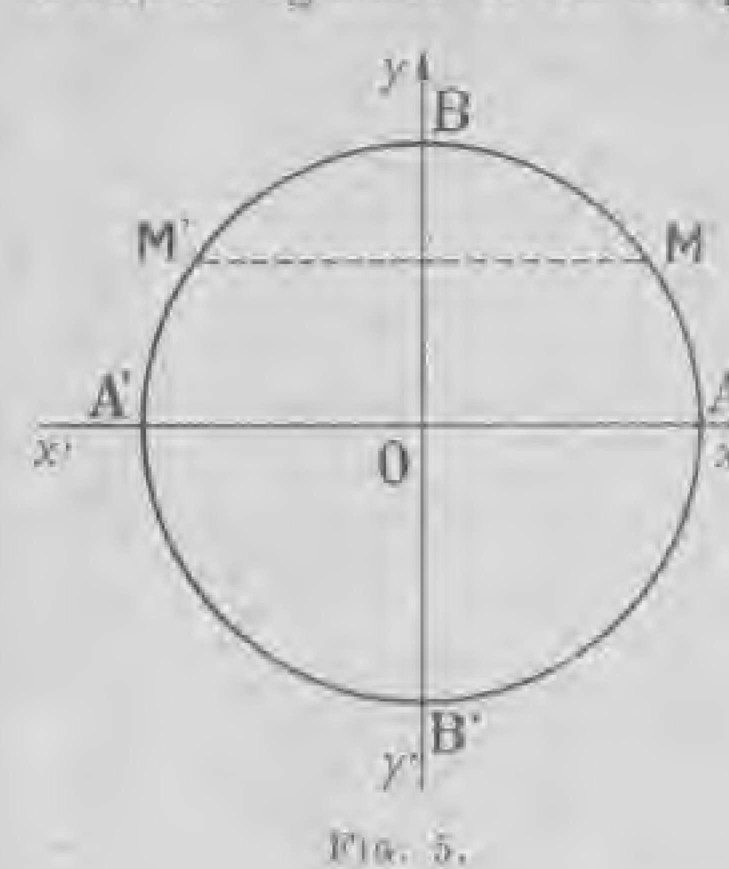


Fig. 5.

$$a + a' = \pi + 2(k_2 - k_1)\pi$$

et, en posant

$$k_2 - k_1 = k$$

$$\boldsymbol{a + a' = \pi + 2k\pi}$$
$$\boldsymbol{= (2k + 1)\pi.}$$

De tels arcs sont dits **supplémentaires.**

Remarque :

Si $k = 0$,

$a + a' = \pi$.

7. ARCS DONT LES EXTRÉMITÉS SONT SYMÉTRIQUES PAR RAPPORT AU CENTRE.

Soient $\overset{\frown}{AM}$ et $\overset{\frown}{AM'}$ deux arcs de mesures algébriques a et a' dont les extrémités sont symétriques par rapport au centre O.

On a :

$$\widehat{AM'} = \widehat{AM} + \widehat{MM'} + 2k\pi\ ;$$

or $\widehat{MM'} = \pi$.

Donc,

$$\widehat{AM'} = \widehat{AM} + (2k + 1)\pi$$

$$\boldsymbol{a' = a + (2k + 1)\pi.}$$

Remarque : Si $k = 0$,

$a' = a + \pi$.

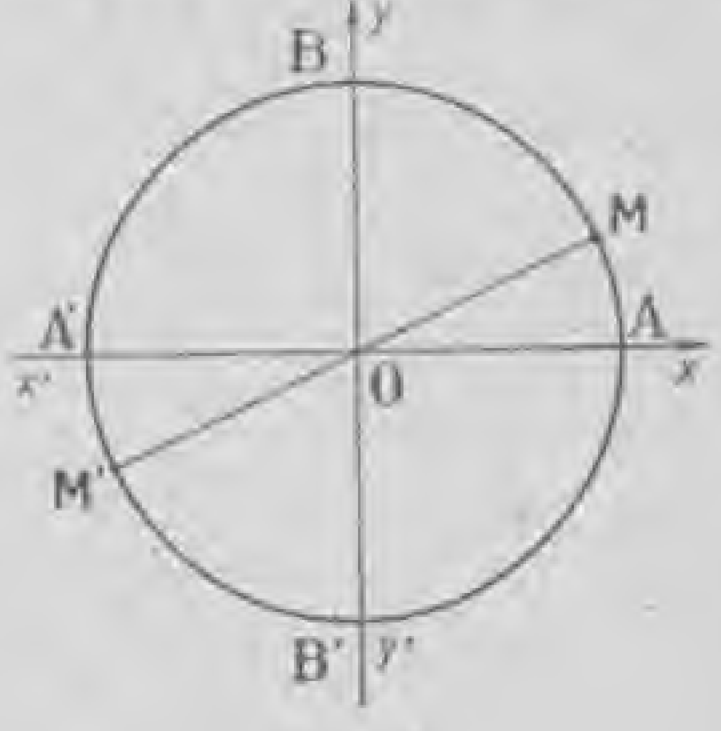


Fig. 6.

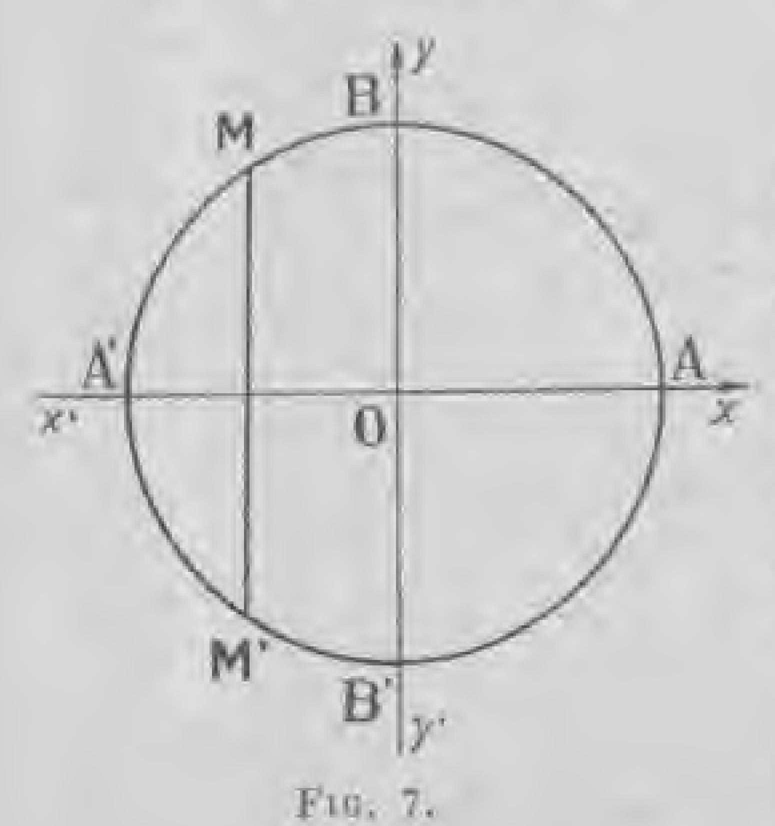


Fig. 7.

8. ARCS DONT LES EXTRÉMITÉS SONT SYMÉTRIQUES PAR RAPPORT A Ox, OU ARCS OPPOSÉS.

Soient $\overset{\frown}{AM}$ et $\overset{\frown}{AM'}$ deux arcs de mesures algébriques a et a' dont les extrémités M et M' sont symétriques par rapport à l'axe Ox.

Le point A est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{MM'}$

et

$$\widehat{AM'} = -\widehat{AM} = \widehat{MA}.$$

$$a' = -a + 2k\pi$$

$$\boldsymbol{a + a' = 2k\pi :}$$

De tels arcs sont dits **opposés.**

Remarque : Si $k = 0$ $\quad$ $a' = -a$.

9. ARCS COMPLÉMENTAIRES.

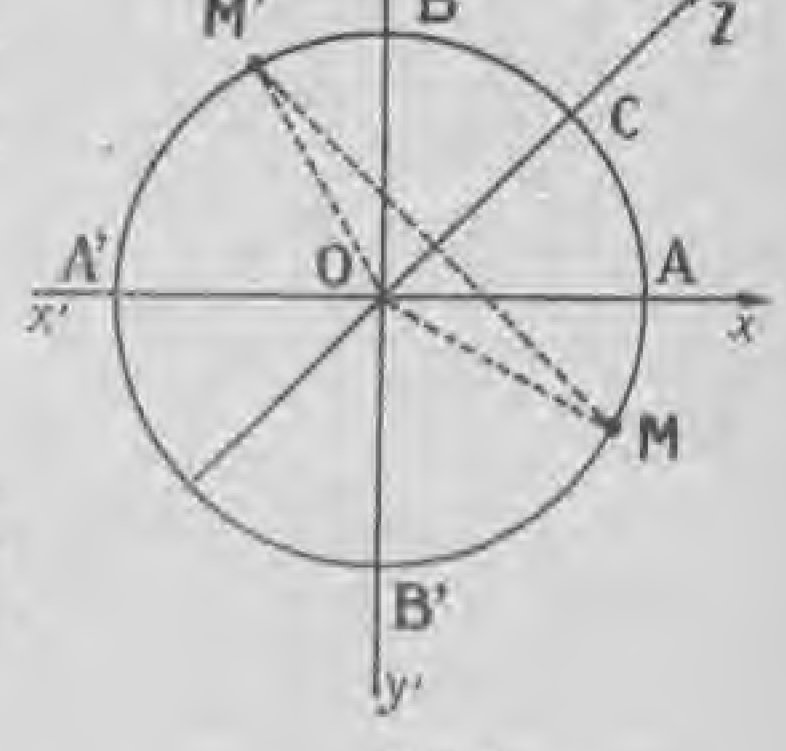


Fig. 8

Soit Oz la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ qui rencontre le cercle au point C tel que

$$\widehat{AC} = \frac{\pi}{4}.$$

Soient $\overset{\frown}{AM}$ et $\overset{\frown}{AM'}$ deux arcs de mesures algébriques a et a', dont les extrémités sont symétriques par rapport à cet axe Oz.

C est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{MM'}$

et

$$\widehat{CM'} = -\widehat{CM} = \widehat{MC}.$$

$$\widehat{CM'} = \widehat{CA} + \widehat{AM'} + 2k_1\pi = -\frac{\pi}{4} + a' + 2k_1\pi,$$

$$\widehat{MC} = \widehat{MA} + \widehat{AC} + 2k_2\pi = -a + \frac{\pi}{4} + 2k_2\pi.$$

En égalant ces deux valeurs et en simplifiant

$$a + a' = \frac{\pi}{2} + 2(k_2 - k_1)\pi$$

et en posant $\quad k_2 - k_1 = k$

$$\boldsymbol{a + a' = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.}$$

De tels arcs sont dits **complémentaires.**

Remarque : Si $k = 0$, $\quad a + a' = \dfrac{\pi}{2}$.

10. ARCS DIFFÉRANT DE $\frac{\pi}{2}$.

Soient $\overset{\frown}{AM}$ et $\overset{\frown}{AM'}$ deux arcs de mesures algébriques a et a' tels que $\overset{\frown}{AM}$ et $\overset{\frown}{BM'}$ soient, à $2k\pi$ près, égaux et de même sens.

On peut écrire

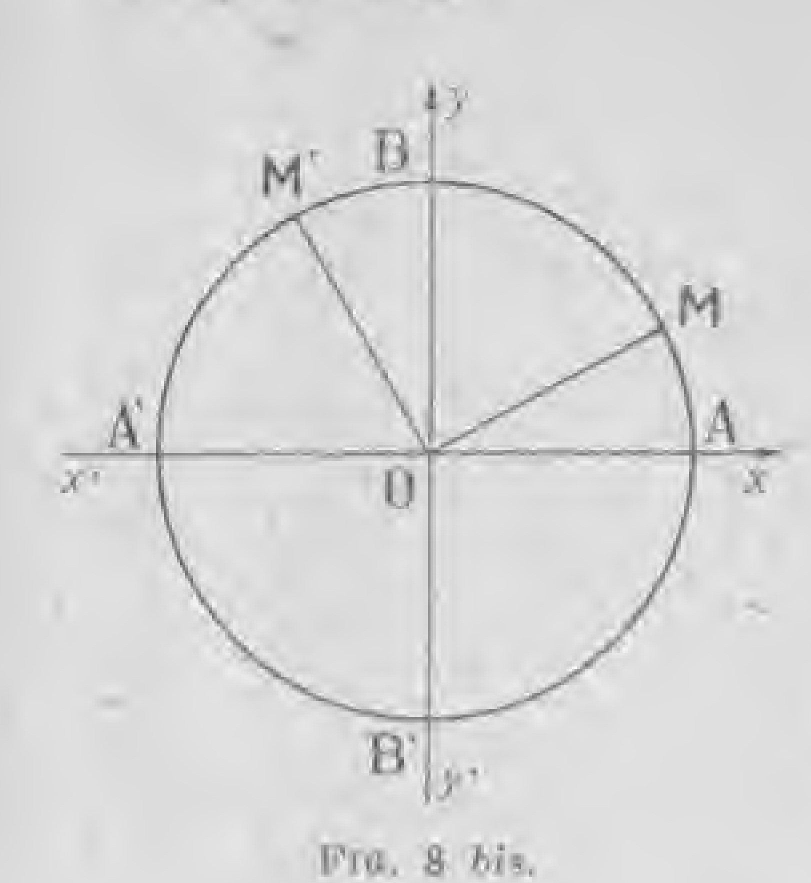


Fig. 8 *bis*.

$$\widehat{AM'} = \widehat{AB} + \widehat{BM'} + 2k\pi$$
$$= \widehat{AB} + \widehat{AM} + 2k\pi$$

ou $\quad a' = \dfrac{\pi}{2} + a + 2k\pi.$

Remarques 1) Si $k = 0$,

$$a' = \frac{\pi}{2} + a.$$

2)

$$\widehat{MM'} = \widehat{MA} + \widehat{AB} + \widehat{BM'} + 2k\pi$$

et comme

$$\widehat{BM'} = \widehat{AM} = -\widehat{MA}$$

$$\widehat{MM'} = \widehat{AB} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Les rayons OM et OM' sont perpendiculaires et *l'on passe de M à M' par une rotation de $+\dfrac{\pi}{2}$ autour de O.*

§ *III. FONCTIONS CIRCULAIRES.*

11. DÉFINITIONS. Soient $\overset{\frown}{AM}$ un axe du cercle trigonométrique de mesure algébrique a, P et Q les projections de M sur Ox et Oy.

Soient At et Bs les tangentes au cercle en A et B orientées de la même manière que Oy et Ox, T et S les points de rencontre du rayon OM avec ces tangentes.

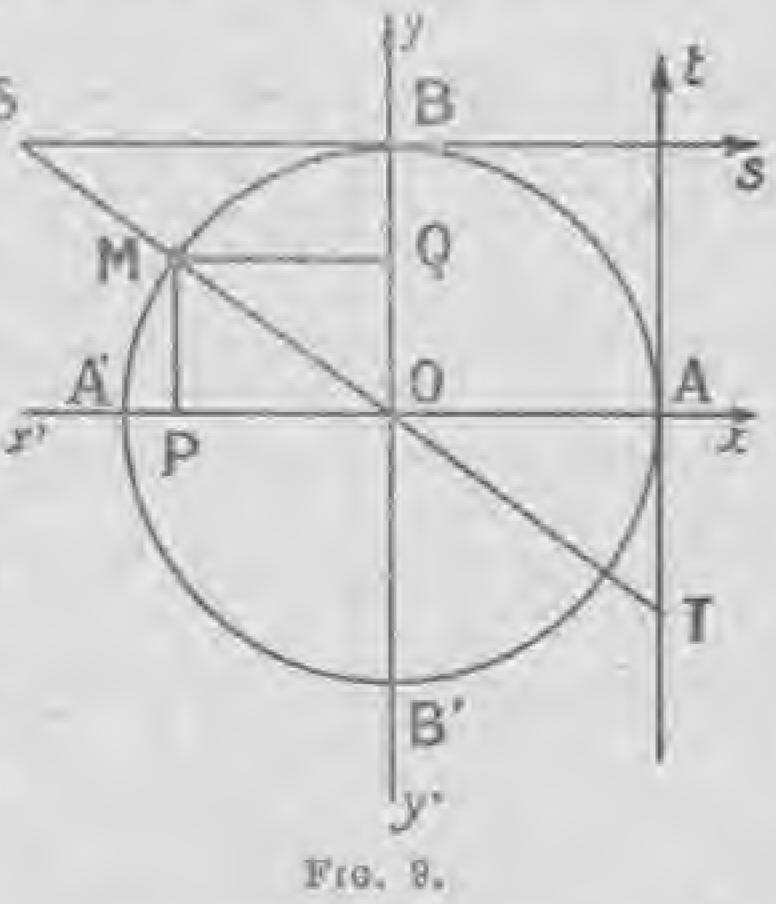


Fig. 8.

On appelle sinus de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ ou encore sinus de l'arc $\overset{\frown}{AM}$, la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{PM}$ (ou du vecteur $\overrightarrow{OQ}$).

On peut représenter chaque arc par sa mesure algébrique a et l'on écrit

$$\sin a = \overline{PM} = \overline{OQ}.$$

On appelle cosinus de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ ou encore de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{OP}$ (ou du vecteur $\overrightarrow{QM}$).

On écrit de même

$$\cos a = \overline{OP} = \overline{QM}.$$

On appelle tangente des angles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ ou encore tangente de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AT}$

$$tg\ a = \overline{AT}.$$

On appelle cotangente des angles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ ou encore cotangente de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{BS}$.

$$cotg\ a = \overline{BS}.$$

12. VARIATION ET SIGNE DES FONCTIONS CIRCULAIRES.

Les fonctions circulaires sont des fonctions périodiques de période 2π.

Une fonction est dite périodique lorsqu'elle reprend la même valeur quand on ajoute à la variable une quantité constante appelée période.

Or, chaque fois que la mesure algébrique de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ augmente de 2π, l'extrémité de l'arc revient au même point du cercle trigonométrique ; les vecteurs $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{QM}$, $\overrightarrow{AT}$ et $\overrightarrow{BS}$ reprennent la même position et la même valeur algébrique.

On peut donc écrire :

$$\sin (2k\pi + a) = \sin a$$
$$\cos (2k\pi + a) = \cos a$$
$$tg\ (2k\pi + a) = tg\ a$$
$$cotg\ (2k\pi + a) = cotg\ a.$$

Ces relations montrent que les fonctions circulaires sont des fonctions périodiques de période 2π.

Par conséquent pour connaître les valeurs et les signes des fonctions circulaires, il suffira d'étudier leur variation dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

Remarque. — On verra plus loin que la tangente et la cotangente ont en réalité pour période π.

SIGNE DES FONCTIONS CIRCULAIRES

13. ARCS COMPRIS ENTRE 0 ET $\frac{\pi}{2}$.

(Arcs terminés dans le premier quadrant) (fig. 10).

La figure montre alors que les vecteurs $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{AT}$ et $\overrightarrow{BS}$ sont dirigés dans le sens positif des axes $x'x$ et $y'y$. ***Les quatre fonctions circulaires des arcs du premier quadrant sont donc positives.***

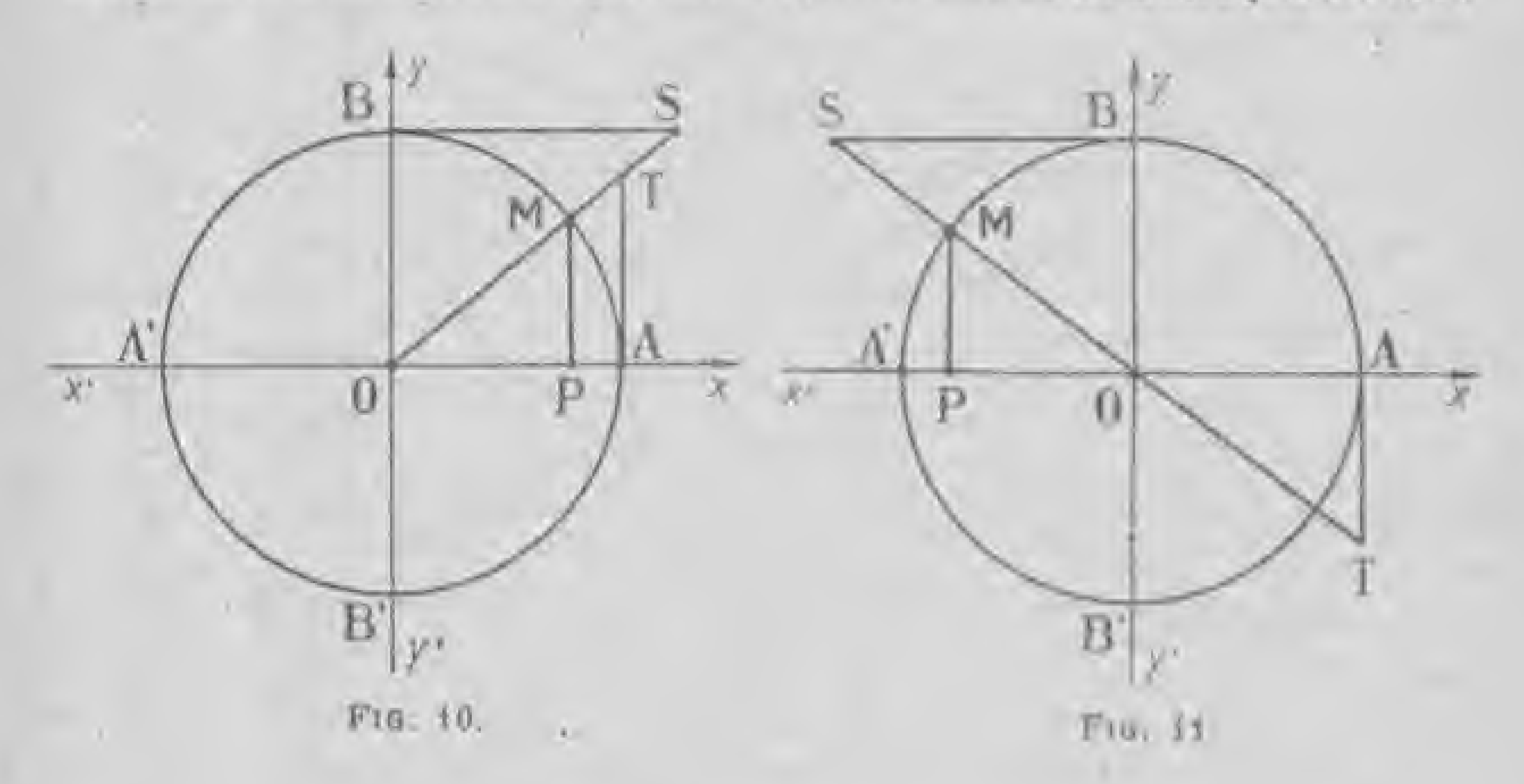


Fig. 10. Fig. 11

14. ARCS COMPRIS ENTRE $\frac{\pi}{2}$ ET π.

(Arcs terminés dans le second quadrant) (fig. 11).

La figure montre que les vecteurs $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{AT}$ et $\overrightarrow{BS}$ sont alors dirigés dans le sens négatif, le vecteur $\overrightarrow{PM}$ dans le sens positif.

Le sinus d'un arc du deuxième quadrant est donc positif; les autres fonctions circulaires sont négatives.

15. ARCS COMPRIS ENTRE π ET $\frac{3\pi}{2}$.

(Arcs terminés dans le troisième quadrant) (fig. 12).

La figure montre que les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{OP}$ sont dans le sens négatif, tandis que les vecteurs $\overrightarrow{AT}$ et $\overrightarrow{BS}$ sont dans le sens positif.

Le sinus et le cosinus d'un arc du troisième quadrant sont négatifs ; la tangente et la cotangente sont positives.

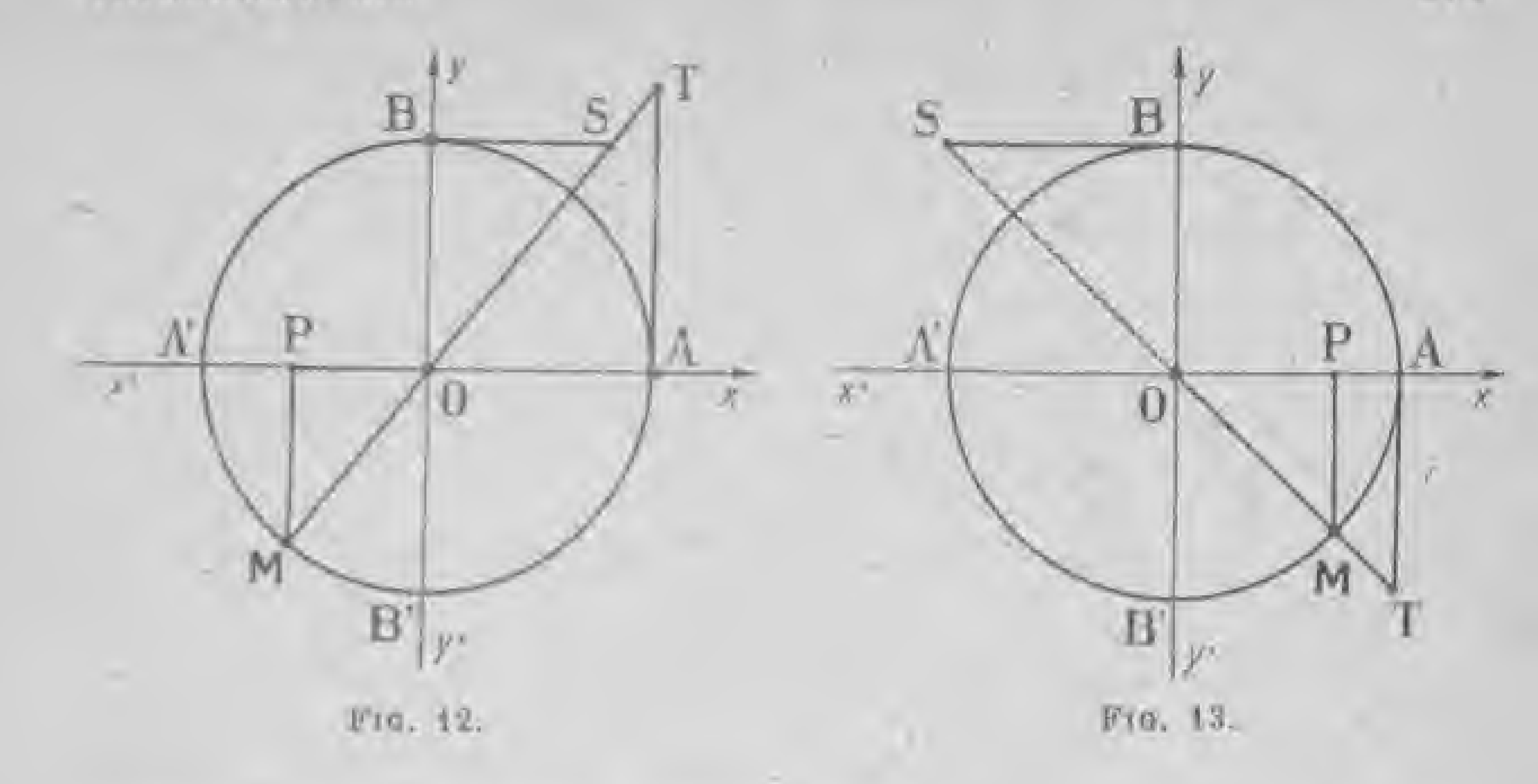


Fig. 12. Fig. 13.

16. ARCS COMPRIS ENTRE $\frac{3\pi}{2}$ ET 2π.

(Arcs terminés dans le quatrième quadrant) (fig. 13).

La figure montre que les vecteurs $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{AT}$ et $\overrightarrow{BS}$ sont dans le sens négatif tandis que le vecteur $\overrightarrow{OP}$ est dans le sens positif.

Le cosinus des arcs du quatrième quadrant est positif ; les autres fonctions circulaires sont négatives.

Ces conclusions sont résumées dans le tableau suivant :

a	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
sin a		+		+		—		—	
cos a		+		—		—		+	
tg a		+		—		+		—	
cotg a		+		—		+		—	

17. VARIATION DES FONCTIONS CIRCULAIRES.

Soit x un arc auquel on fait prendre toutes les valeurs de 0 à 2π. L'examen du cercle trigonométrique permet de construire le tableau suivant de variation pour les différentes fonctions circulaires de l'arc x.

Variation du sinus.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
sin x	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0

Cette variation est représentée par la courbe suivante appelée sinusoïde.

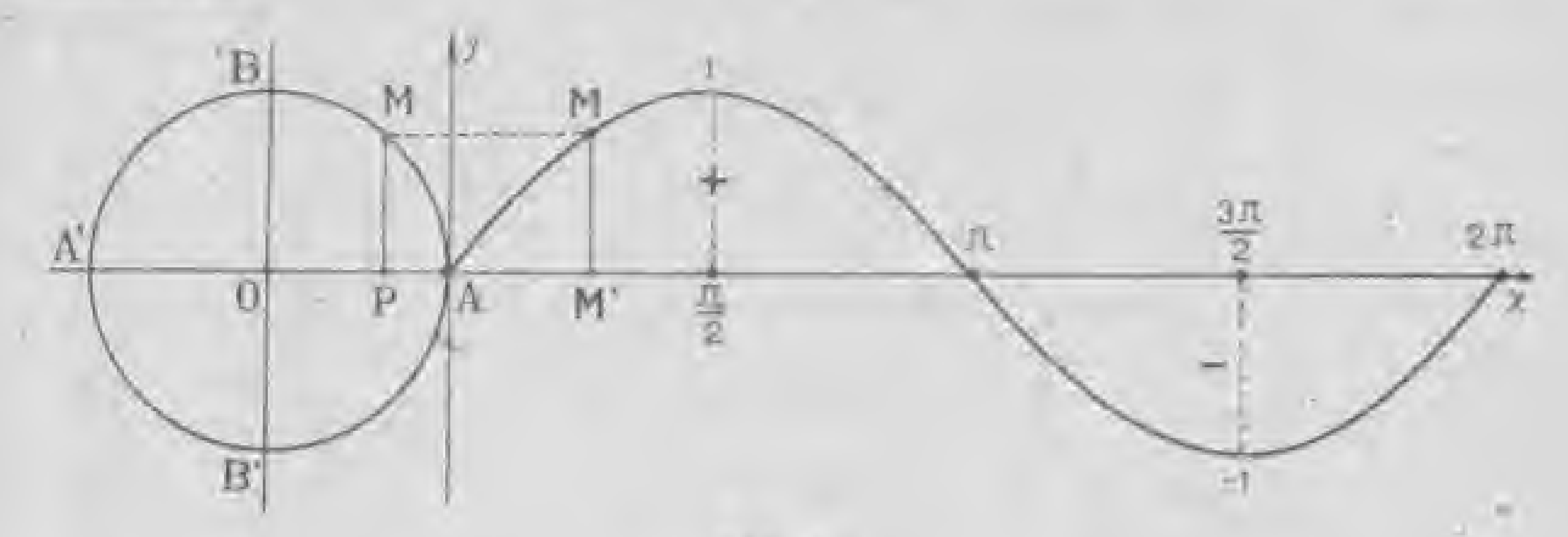


Fig. 14.

Variation du cosinus.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos x$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1

Fig. 15.

Variation de la tangente.

Considérons une valeur de x infiniment voisine de $\frac{\pi}{2}$ mais plus petite $\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$. Le point de rencontre du rayon OM et de la tangente AT est alors rejeté à l'infini dans la direction positive. La tangente devient infiniment grande et positive ; elle tend vers $+\infty$.

Pour une valeur de x infiniment voisine de $\frac{\pi}{2}$ mais plus grande $\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)$ le point de rencontre de OM et de AT est encore rejeté à l'infini, mais dans la direction négative ; $\operatorname{tg} x$ tend donc vers $-\infty$ quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs supérieures. Pour $x = \frac{\pi}{2}$ la fonction $\operatorname{tg} x$ présente donc une discontinuité de $+\infty$ à $-\infty$.

Elle présente la même discontinuité pour $x = \frac{3\pi}{2}$.

Sur le graphique, les droites $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$ sont asymptotes à la courbe.

On peut construire le tableau et le graphique suivants :

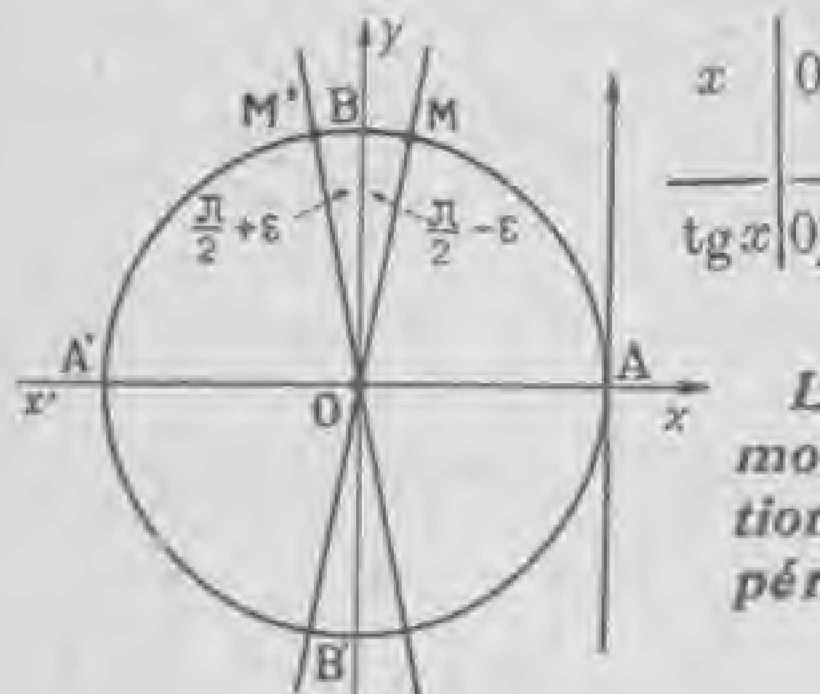
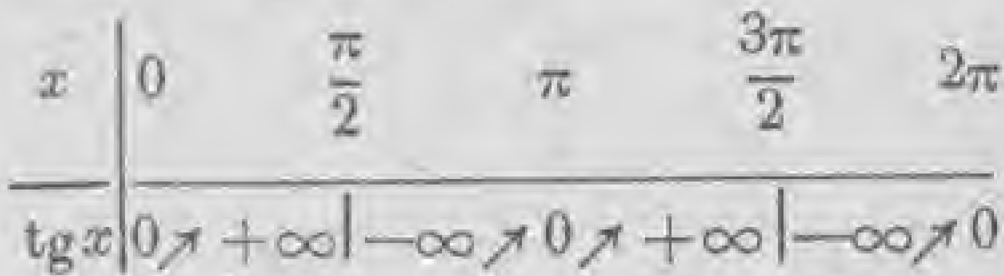


Fig. 16.



x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\operatorname{tg} x$	0	↗	$+\infty \mid -\infty$	↗	0	↗	$+\infty \mid -\infty$	↗	0

Le tableau et le graphique montrent que tg x est une fonction toujours croissante et de période π.

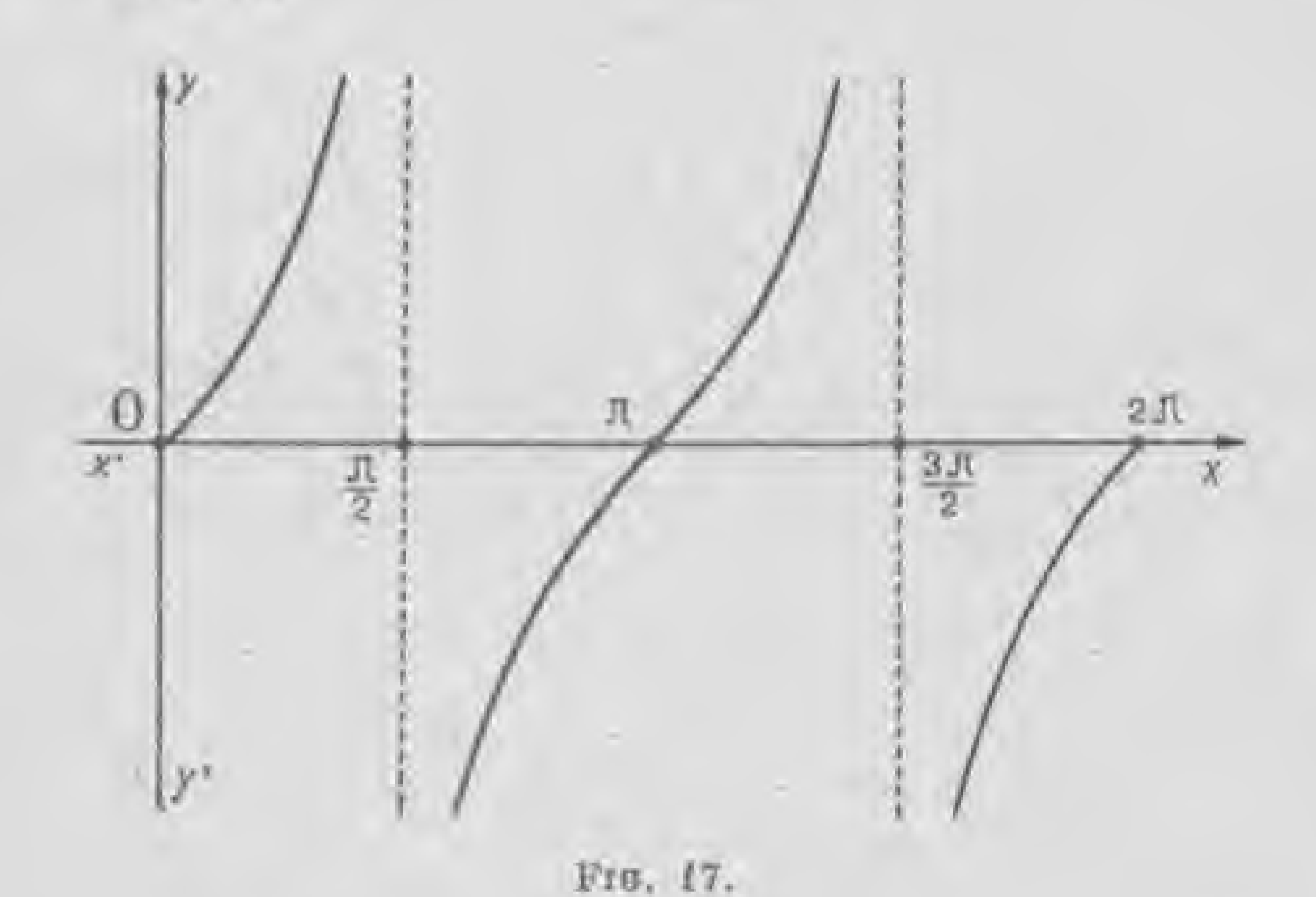


Fig. 17.

Variation de la cotangente.

La variation de la cotangente s'obtient par l'examen direct du cercle trigonométrique.

C'est une fonction constamment décroissante et de période π.

Elle présente une discontinuité pour $x = 0$ et $x = \pi$ et le graphique admet comme asymptotes les droites $x = 0$ et $x = \pi$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\operatorname{cotg} x$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty \mid +\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

Fig. 18.

Remarque. — On établira plus loin la relation $\cot g\, x = 1/\text{tg}\, x$ qui permet de déduire les variations de la cotangente de celle de la tangente.

18. RELATIONS ENTRE LES FONCTIONS CIRCULAIRES D'UN MÊME ARC.

Soit $\overset{\frown}{AM}$ un arc quelconque de mesure algébrique a.

On aura toujours

$$\overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{OM}^2$$

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1. \qquad (1)$$

Fig. 19.

Les triangles semblables OPM et OAT donnent

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{OP}},$$

ou

$$\text{tg}\, a = \frac{\sin a}{\cos a} \qquad (2)$$

Les triangles semblables OMQ et OSB donnent de même

$$\frac{\overline{BS}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{QM}}{\overline{OQ}}$$

ou

$$\text{cotg}\, a = \frac{\cos a}{\sin a}. \qquad (3)$$

Enfin les triangles rectangles OAT et OBS donnent

$$\frac{\overline{BS}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AT}} \quad \text{ou} \quad \text{cotg}\, a = \frac{1}{\text{tg}\, a}, \qquad (4)$$

relation que l'on peut aussi déduire de la comparaison de (2) et (3).

§ IV. RELATIONS ENTRE LES FONCTIONS CIRCULAIRES DES ARCS REMARQUABLES.

19. ARCS SUPPLÉMENTAIRES.

Soient $\overset{\frown}{AM}$ et $\overset{\frown}{AM'}$ deux arcs supplémentaires. Leurs mesures algébriques sont liées par la relation :

$$a' = (2k + 1)\pi - a. \quad (\text{n}^\circ\ 6)$$

Les extrémités M et M' étant symétriques par rapport à Oy se projetteront en un même point Q de Oy ; leurs projections P et P' sur Ox seront symétriques par rapport à O ; on aura donc

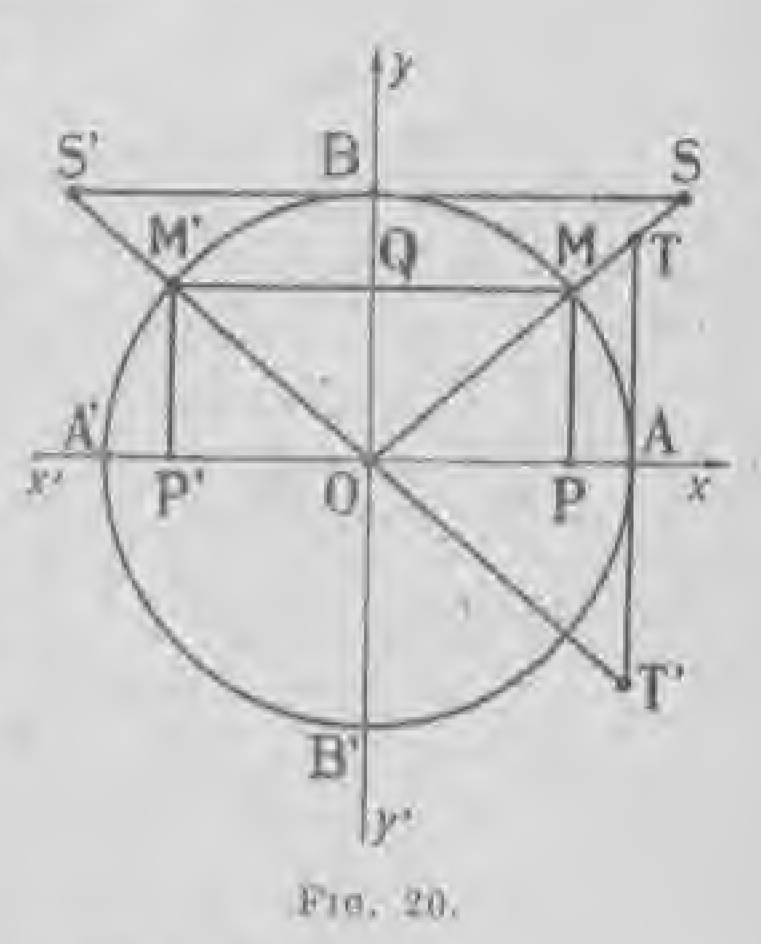


Fig. 20.

$$\overline{OQ} = \sin a' = \sin[(2K+1)\pi - a] = \sin a,$$

$$\overline{OP'} = -\overline{OP}\ ;\ \cos a' = \cos[(2K+1)\pi - a] = -\cos a,$$

et en effectuant les rapports

$$\text{tg}\ [(2K+1)\pi - a] = -\ \text{tg}\ a,$$

$$\text{cotg}\,[(2K+1)\pi - a] = -\,\text{cotg}\ a.$$

En particulier, si $k = 0$, on aura :

$$\sin(\pi - a) = \sin a,$$

$$\cos(\pi - a) = -\cos a,$$

$$\text{tg}\,(\pi - a) = -\,\text{tg}\ a.$$

$$\text{cotg}\,(\pi - a) = -\,\text{cotg}\ a.$$

Ces relations permettent de calculer les fonctions circulaires d'un arc terminé dans le second quadrant, connaissant celles des arcs terminés dans le premier.

20. ARCS DONT LES EXTRÉMITÉS SONT SYMÉTRIQUES PAR RAPPORT AU CENTRE DU CERCLE.

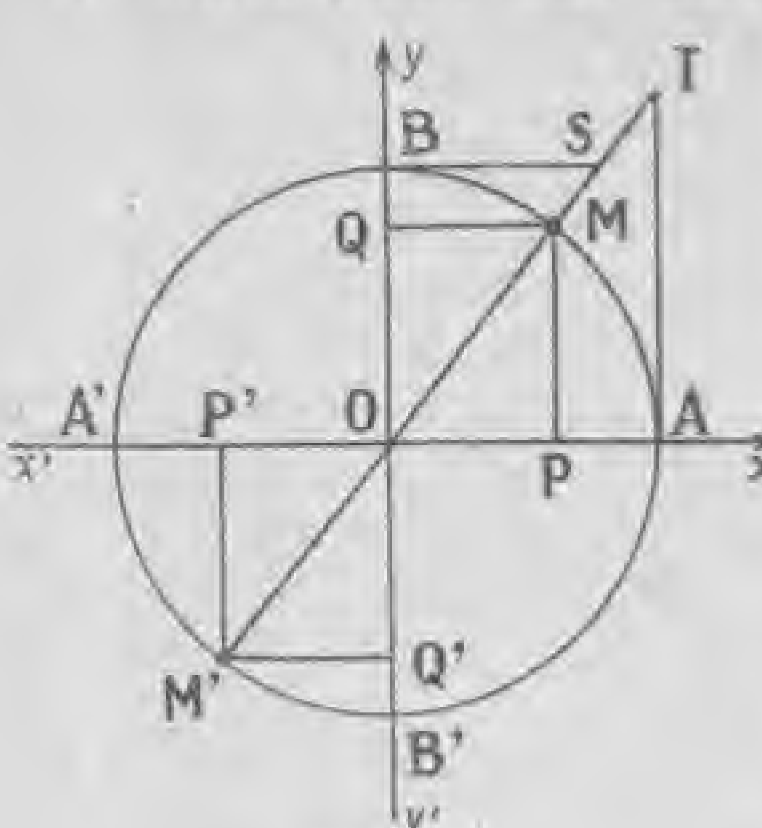


Fig. 21.

Soient $\overset{\frown}{AM}$ et $\overset{\frown}{AM'}$ deux arcs dont les extrémités sont symétriques par rapport au centre O du cercle. Leurs mesures algébriques sont liées par la relation :

$$a' = (2k + 1)\pi + a. \quad (\text{n}^o\ 7)$$

Les projections respectives P et P', Q et Q' de M et M' sur Ox et Oy sont symétriques par rapport à O ; on peut donc écrire :

$$\overline{OP'} = -\overline{OP}, \quad \overline{OQ'} = -\overline{OQ},$$

d'où

$$\cos a' = \cos[(2K + 1)\pi + a] = -\cos a,$$
$$\sin a' = \sin[(2K + 1)\pi + a] = -\sin a,;$$

et en faisant le rapport :

$$\text{tg } a' = \text{tg }[(2K + 1)\pi + a] = \text{tg } a,$$
$$\text{cotg } a' = \text{cotg }[(2K + 1)\pi + a] = \text{cotg } a,$$

Si $k = 0$,

$$\cos(\pi + a) = -\cos a,$$
$$\sin(\pi + a) = -\sin a,$$
$$\text{tg }(\pi + a) = \text{tg } a,$$
$$\text{cotg }(\pi + a) = \text{cotg } a.$$

Ces formules permettent de calculer les fonctions circulaires des arcs terminés dans le troisième quadrant, connaissant celles des arcs terminés dans la premier quadrant.

21. ARCS OPPOSÉS.

Soient $\overset{\frown}{AM}$ et $\overset{\frown}{AM'}$ deux arcs opposés. Leurs mesures algébriques sont liées par la relation :

$$a' = 2k\pi - a. \quad (\text{n}^o\ 8)$$

Les points M et M' étant symétriques par rapport à Ox se projettent sur Ox en un même point P et leurs projections sur Oy, Q et Q' sont symétriques par rapport à O.

On aura donc :

$$\overline{OP} = \cos a' = \cos[2K\pi - a] = \cos a ;$$
$$\overline{OQ'} = -\overline{OQ} \quad \text{ou} \quad \sin a' = \sin[2K\pi - a] = -\sin a ;$$

et, par division,

$$\text{tg } a' = \text{tg }[2K\pi - a] = -\text{tg } a,$$
$$\text{cotg } a' = \text{cotg}[2K\pi - a] = -\text{cotg } a.$$

Si $k = 0$,

$$\cos(-a) = \cos a,$$
$$\sin(-a) = -\sin a,$$
$$\text{tg }(-a) = -\text{tg } a,$$
$$\text{cotg }(-a) = -\text{cotg } a.$$

Fig. 22.

Ces relations permettent de calculer les fonctions circulaires des arcs terminés dans le quatrième quadrant, connaissant celles des arcs terminés dans le premier quadrant.

22. ARCS COMPLÉMENTAIRES.

Soient $\overset{\frown}{AM}$ et $\overset{\frown}{AM'}$ deux arcs complémentaires. Leurs mesures algébriques a et a' sont liées par la relation :

$$a' = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - a, \quad (\text{n}^o\ 9)$$

Les points M et M' sont symétriques par rapport à Oz, ainsi que les axes Ox et Oy.

Les projections P de M sur Ox et Q' de M' sur Oy sont symétriques par rapport à Oz et

$$\overline{OQ'} = \overline{OP}$$

$$\sin a' = \sin\left[2K\pi + \frac{\pi}{2} - a\right] = \cos a.$$

Fig. 23.

De même, les projections Q de M sur Oy et P' de M' sur Ox sont symétriques par rapport à Oz et $\overline{OP'} = \overline{OQ}$

$$\cos a' = \cos\left[2K\pi + \frac{\pi}{2} - u\right] = \sin a.$$

D'où

$$tg\ a' = tg\left[2K\pi + \frac{\pi}{2} - a\right] = cotg\ a,$$

$$cotg\ a' = cotg\left[2K\pi + \frac{\pi}{2} - a\right] = tg\ a.$$

Si $k = 0$,

$$cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = sin\ a,$$

$$sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = cos\ a,$$

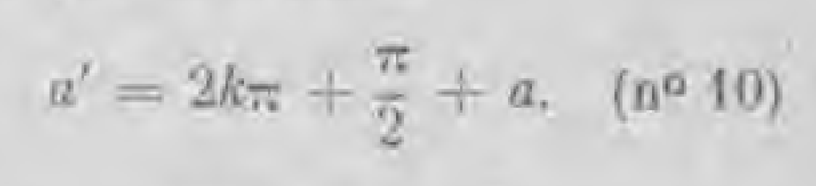
$$tg\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = cotg\ a,$$

$$cotg\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = tg\ a.$$

23. ARCS DIFFÉRANT DE $\frac{\pi}{2}$.

Soient $\overset{\frown}{AM}$ et $\overset{\frown}{AM'}$ deux arcs tels que $\overset{\frown}{AM}$ et $\overset{\frown}{BM'}$ soient à $2k\pi$ près, égaux et de même sens.

Leurs mesures algébriques sont liées par la relation



$$a' = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + a. \quad (\text{n}^o\ 10)$$

Une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de O amène M en M', Ox sur Oy et Oy sur Ox'. Elle amène aussi en coïncidence P et Q', Q et P'. Le sens positif de Ox coïncidant après rotation avec le sens positif de Oy on a :

Fig. 24.

$$\overline{OQ'} = \overline{OP}$$

ou

$$sin\ a' = sin\left[2k\pi + \frac{\pi}{2} + a\right] = cos\ a.$$

Le sens positif de Oy après rotation coïncidant avec le sens négatif de Ox, on a

$$\overline{OP'} = -\overline{OQ},$$

$$cos\ a' = cos\left[2k\pi + \frac{\pi}{2} + a\right] = -sin\ a,$$

D'où

$$tg\ a' = tg\left[2k\pi + \frac{\pi}{2} + a\right] = -cotg\ a,$$

$$cotg\ a' = cotg\left[2k\pi + \frac{\pi}{2} + a\right] = -tg\ a.$$

Si $k = 0$,

$$sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = cos\ a,$$

$$cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -sin\ a,$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -cotg\ a,$$

$$cotg\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -tg\ a.$$

24. CALCUL DES FONCTIONS CIRCULAIRES D'UN ARC.

Arcs du premier quadrant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Cas où l'arc considéré est une partie aliquote de π. — Le sinus d'un arc compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ est la moitié de la corde du cercle trigonométrique qui sous-tend l'arc double.

Soit AM un arc compris entre 0 e $\frac{\pi}{2}$. M' le point symétrique de M par rapport à l'axe $x'x$.

On a $\sin\alpha = \overline{PM} = \frac{\overline{MM'}}{2}$.

Fig. 25.

Conséquence . ***Si $\alpha = \frac{\pi}{n}$, le sinus de cet arc est le demi-côté du polygone régulier de n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique.***

Le cosinus est l'apothème de ce polygone.

La géométrie donne le tableau suivant pour les principales valeurs de n.

Le sinus et le cosinus permettent de calculer la tangente et la cotangente.

a	$\sin a$	$\cos a$	$\operatorname{tg} a$	$\operatorname{cotg} a$	Polygone correspondant.
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	Hexagone.
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	Carré.
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	Triangle équilatéral.

Usage des tables de valeurs naturelles.

Il existe des tables qui donnent les valeurs des fonctions circulaires des arcs compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (voir pages 301 et 302).

Ces tables donnent en général les fonctions circulaires des arcs de degré en degré ou de grade en grade (quelquefois de 10′ en 10′). *Si l'arc figure dans la table, une simple lecture donnera la fonction circulaire demandée.*

Ainsi, on aura :

$$\sin 16^\circ = 0{,}275\,637$$
$$\cos 46^g = 0{,}750\,11$$
$$\operatorname{tg} 76^\circ = 4{,}010\,781$$
$$\operatorname{cotg} 45^g = 1{,}170\,85.$$

Si l'arc considéré ne figure pas dans le tableau, on peut, avec une approximation suffisante pour les calculs usuels, supposer les variations des fonctions circulaires proportionnelles aux variations des arcs dans les intervalles de 1° ou de 1^g considérés.

Ainsi, si l'on cherche $\sin 35^\circ 28'$, on voit que la table donne ;

$$\sin 35^\circ = 0{,}573\,576$$
$$\sin 36^\circ = 0{,}587\,785$$

Quand l'arc augmente de 1°, le sinus augmente donc de

$$0{,}0142\,09.$$

Quand l'arc augmente de 1′, le sinus augmentera donc de :

$$\frac{0{,}0142\,09}{60}.$$

Quand l'arc augmente de 28′ le sinus augmente de :

$$\frac{0{,}0142\,09}{60} \times 28 = 0{,}006\,630$$

donc :

$$\sin 35^\circ 28' = 0{,}573\,576 + 0{,}006\,630 = 0{,}580\,206.$$

De même soit à calculer $\cos 52^g 26$.

La table donne $\cos 52^g = \sin 48^g = 0{,}684\,55$

$$\cos 53^g = \sin 47^g = 0{,}673\,01.$$

Quand l'arc augmente de 0,01 le cosinus diminue de

$$\frac{0{,}0115\,4}{100}.$$

Quand l'arc augmente de $0^g{,}26$, le cosinus diminue de

$$0{,}0115\,4 \times 0{,}26 = 0{,}003\,000\,4$$

donc $$\cos 52^g 26 = 0{,}681\,55.$$

On emploie un procédé analogue pour la tangente et la cotangente.

Arcs compris entre $\frac{\pi}{2}$ et 2π.

Si l'arc considéré est supérieur à $\frac{\pi}{2}$, on cherche dans quel quadrant il est terminé et on le rapporte à un arc du premier quadrant :

soit en prenant son supplément s'il est terminé dans le deuxième quadrant ;

soit en retranchant π, s'il est terminé dans le troisième quadrant ;

soit en le retranchant de 2π s'il est terminé dans le quatrième quadrant.

On applique ensuite les règles convenables concernant les signes d'après les résultats trouvés aux nos 19 à 22.

Ainsi : $\sin 128^\circ 27' = \sin (180^\circ - 128^\circ 27') = \sin 51^\circ 33.$

$$\cos 242^g 31' = -\cos (242^g 31 - 200^g) = -\cos 42^g 31.$$
$$\operatorname{tg} 326^\circ 13' = -\operatorname{tg} (360^\circ - 326^\circ 13') = -\operatorname{tg} 33^\circ 47'.$$

25. CALCUL DES FONCTIONS CIRCULAIRES D'UN ARC CONNAISSANT L'UNE D'ELLES.

1° Le sinus est donné.

De $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, on tire :

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a,$$
$$\cos a = \pm\sqrt{1 - \sin^2 a}$$

et de $$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{1}{\operatorname{cotg} a},$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\pm\sqrt{1 - \sin^2 a}}$$

et $$\operatorname{cotg} a = \frac{\pm\sqrt{1 - \sin^2 a}}{\sin a}.$$

Il y a deux groupes de réponses, l'un avec le signe + du radical, l'autre avec le signe —.

Portons en effet la valeur du sinus en $\overline{OQ}$ sur l'axe Oy des sinus, les arcs qui admettent $\overline{OQ}$ comme sinus sont terminés en M ou en M' et admettent des groupes de fonctions circulaires opposées.



Fig. 26.

Un procédé analogue permet de déterminer les fonctions circulaires d'un arc dont le cosinus est connu.

2° **La tangente est donnée.**

On peut écrire :

$$\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = \operatorname{tg}^2 a$$

ou
$$\frac{\sin^2 a}{\operatorname{tg}^2 a} = \frac{\cos^2 a}{1} = \frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$$

d'où
$$\boldsymbol{\sin^2 a = \frac{\operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}, \quad \cos^2 a = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 a}}$$

$$\text{et } \sin a = \frac{\operatorname{tg} a}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}, \quad \cos a = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}.$$

Le rapport de sin a et cos a devant être égal à tg a le radical devra être pris avec le même signe dans les deux formules ; il y aura deux groupes de réponses.

$$\begin{cases} \sin a = \dfrac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}} \\[2ex] \cos a = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin a = -\dfrac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}} \\[2ex] \cos a = -\dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}. \end{cases}$$

Ce résultat s'interprète géométriquement. Sur la tangente en A menons un vecteur $\overrightarrow{AT}$ de mesure algébrique égale à tg a.

Les arcs terminés en M ou en M' admettent $\overline{AT}$ comme tangente.

Ils ont des sinus opposés et des cosinus opposés.

Remarque. — L'ambiguïté du signe n'existe que si l'on ne précise pas le quadrant dans lequel est terminé l'arc envisagé. Si la position de l'extrémité est donnée, l'ambiguïté cesse.

Fig. 27.

Ainsi soit à calculer sin a et cos a connaissant tg $a = \sqrt{3}$.

On trouve soit $\quad \sin a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos a = \dfrac{1}{2}$

soit $\quad \sin a = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos a = -\dfrac{1}{2}$.

Mais si l'on spécifie :

calculer sin 240° et cos 240° connaissant tg 240° $= \sqrt{3}$,

l'arc étant terminé dans le troisième quadrant, les réponses négatives seront seules acceptables.

26. ARCS DE FONCTIONS CIRCULAIRES DONNÉES.

A un arc donné correspond un groupe de fonctions circulaires bien déterminées ; par contre, à une fonction circulaire donnée ne correspond pas un arc déterminé.

Arcs de sinus donné. — Soit un arc a défini par l'égalité :

$$\sin a = m,$$

m étant un nombre algébrique compris entre -1 et $+1$. Portons sur l'axe Oy un vecteur $\overrightarrow{OQ}$ ayant pour mesure algébrique m.

Les arcs terminés en M ou en M' admettent pour sinus m et répondent à la question (fig. 28).

Si α est l'un quelconque de ces arcs, ils seront compris dans les formes générales :

$$\boldsymbol{a = 2k\pi + \alpha}$$
$$\boldsymbol{a = (2k + 1)\pi - \alpha.}$$

Arcs de cosinus donné. — Soit un arc a défini par la relation

$$\cos a = m$$

où m est un nombre algébrique compris entre -1 et $+1$.

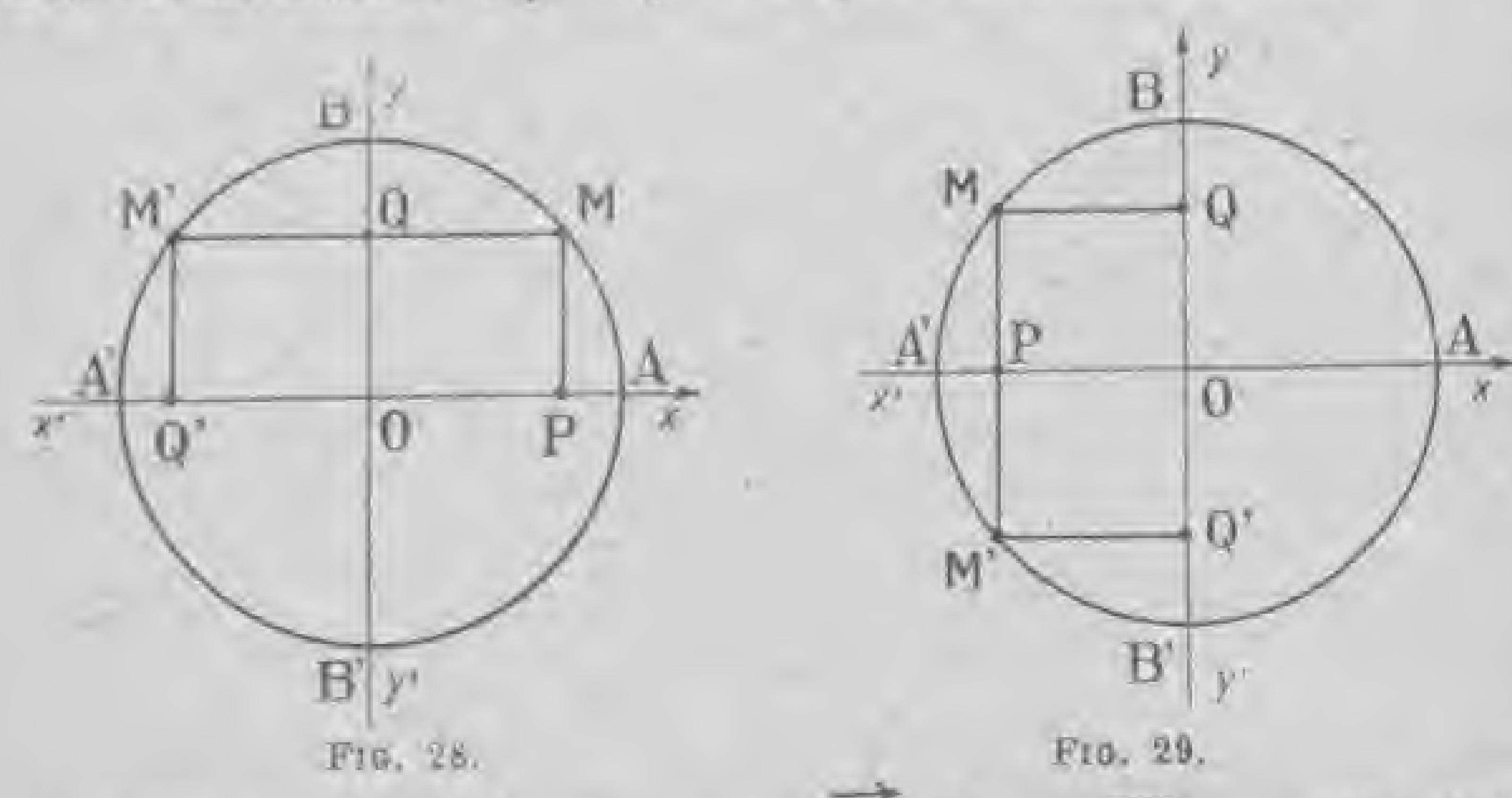


Fig. 28. Fig. 29.

Portons sur l'axe Ox un vecteur $\overrightarrow{OP}$ tel que $\overline{OP} = m$ (fig. 29).

On voit que les arcs terminés en M et en M' admettent m comme

cosinus. Si α est l'un d'entre eux, ils seront compris dans les formes générales :

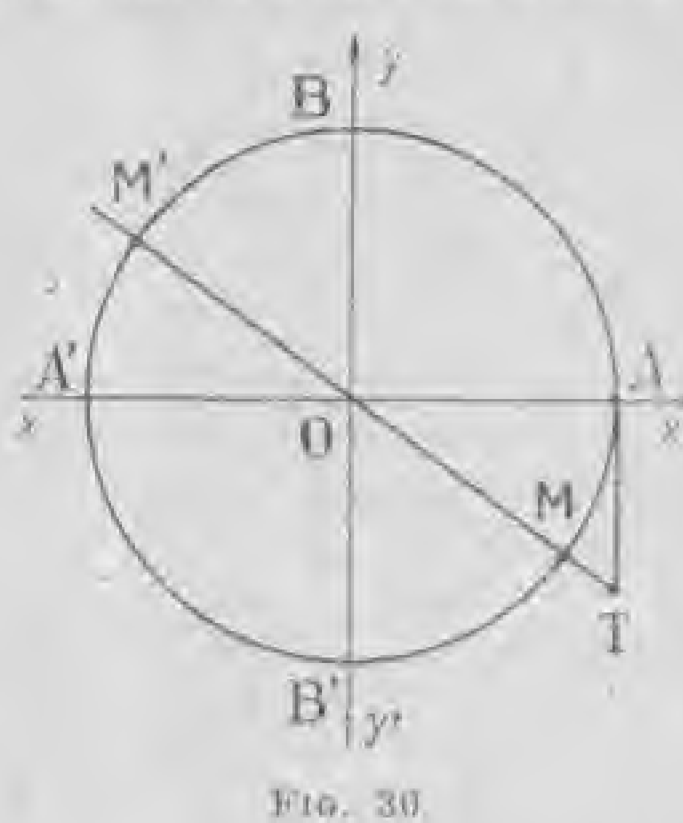


Fig. 30.

$$a = 2k\pi \pm \alpha$$

Arcs de tangente donnée. — Soit a un arc défini par l'égalité

$$\text{tg } a = m$$

où m est un nombre algébrique quelconque : si l'on construit $\overrightarrow{AT}$ tel que $\overline{AT} = m$, les arcs admettant m comme tangente seront terminés en M et en M' et rentreront dans la formule générale :

$$a = k\pi + \alpha.$$

27. APPLICATIONS A LA RÉSOLUTION DE CERTAINES ÉQUATIONS.

1° **Équations de la forme sin x = sin a.**

D'après ce qui précède, l'arc x aura le même sinus que l'arc a s'il rentre dans l'une ou l'autre des formules

$$x = 2k\pi + a$$
$$x = (2k + 1)\pi - a.$$

Exemple. — Résoudre l'équation

$$\sin 3x = \sin 2x.$$

Entre ces arcs existent les relations :

$$3x = 2K\pi + 2x$$

ou $$3x = 2K\pi + \pi - 2x;$$

ce qui donne $$x = 2K\pi \text{ (arcs terminés en A)}$$

$$5x = 2K\pi + \pi$$

$$x = 2K\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{5} = (2K + 1)\frac{\pi}{5}.$$

Ces arcs peuvent être terminés sur le cercle trigonométrique en cinq points différents suivant que l'on donne à K des valeurs de la forme $5k$, $5k + 1$, $5k + 2$, $5k + 3$, $5k + 4$ où k est un entier algébrique.

Ces extrémités forment les sommets d'un pentagone régulier

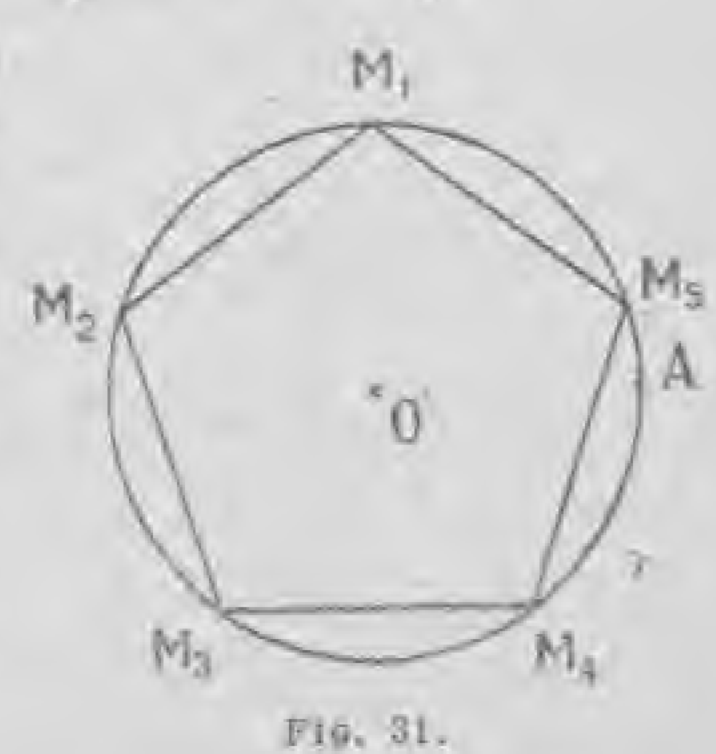


Fig. 31.

2° **cos x = cos a.**

les arcs x sont compris dans la forme générale :

$$x = 2k\pi \pm a.$$

Exemple. — **Soit à résoudre l'équation**

$$\cos 5x = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right).$$

On aura : $$5x = 2K\pi \pm \left(\frac{\pi}{3} + 2x\right).$$

$$3x = 2K\pi + \frac{\pi}{3} \qquad x = 2K\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$$

ou $$7x = 2K\pi - \frac{\pi}{3} \qquad x = 2K\frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{21}.$$

En donnant à K pour la première série les valeurs de la forme $3k, 3k + 1, 3k + 2$ et pour la deuxième série les valeurs $7k$, $7k + 1$ $7k + 2, \ldots 7k + 6$ où k est un nombre entier algébrique, on obtient comme extrémités sur le cercle trigonométrique les sommets d'un triangle équilatéral ou d'un polygone de 7 côtés.

3° **tg x = tg a.**

Les arcs x sont compris dans la forme générale.

$$x = k\pi + a.$$

Exemple : $$\text{tg } 3x = \text{tg}\frac{x}{2}$$

$$3x = K\pi + \frac{x}{2}$$

$$\frac{5x}{2} = K\pi; \quad x = \frac{2K\pi}{5}$$

avec cinq extrémités d'arc sur le cercle trigonométrique.

Remarque. — En observant que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$ on peut ramener à cette forme la résolution des équations de la forme :

$$\sin x = \cos a;$$

§ V. SOMME GÉOMÉTRIQUE DE VECTEURS. THÉORÈME DES PROJECTIONS. FORMULES D'ADDITION.

28. SOMME GÉOMÉTRIQUE DE DEUX VECTEURS.

Soient deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Si d'un point O arbitrairement choisi, on mène :

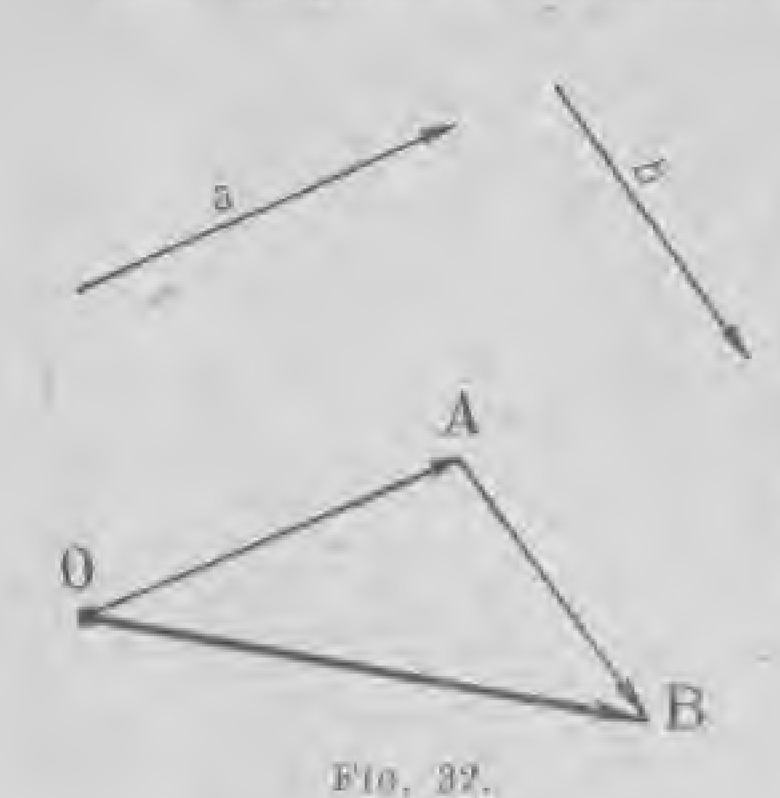


FIG. 32.

$\overrightarrow{OA}$ équipollent à $\vec{a}$,

$\overrightarrow{AB}$ équipollent à $\vec{b}$,

le vecteur $\overrightarrow{OB}$ est par définition, la somme géométrique des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Elle se note

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}.$$

29. PROJECTION ORTHOGONALE.

On appelle projection orthogonale d'un point A sur un axe x'x, le pied A de la perpendiculaire abaissée de A sur cet axe.

On appelle projection orthogonale d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur un axe x'x, le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ qui a pour origine et pour extrémité les projections A' et B' des points A et B.

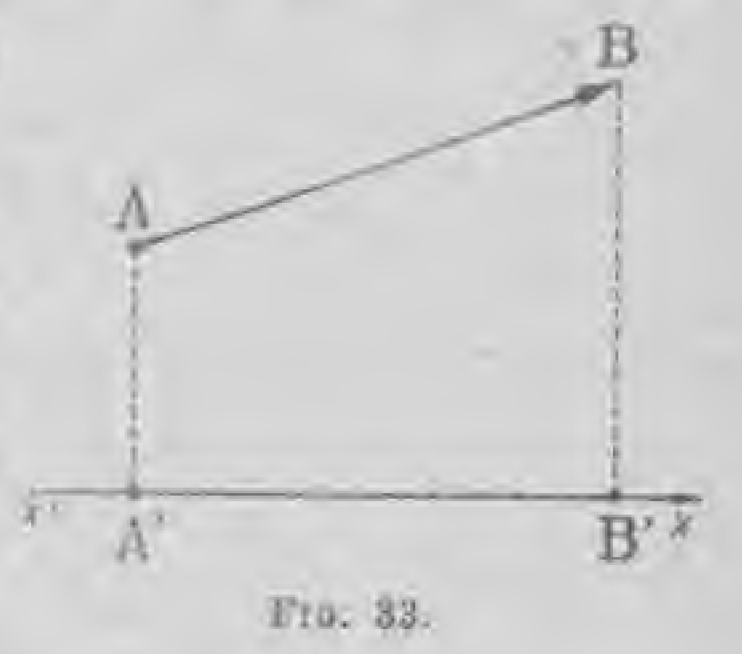


FIG. 33.

Théorème. — ***La mesure algébrique de la projection de la somme géométrique de deux vecteurs sur un axe est égale à la somme des mesures algébriques des projections de ces deux vecteurs sur cet axe.***

FIG. 34.

On peut écrire, en effet, à cause de la relation de Chasles :

$$\overline{A'C'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'}$$

ou

$$\mathit{proj}_{x'x}\,\overrightarrow{AC} = \mathit{proj}_{x'x}\,\overrightarrow{AB} + \mathit{proj}_{x'x}\,\overrightarrow{BC}.$$

30. VALEUR ALGÉBRIQUE DE LA PROJECTION D'UN VECTEUR.

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur porté par un axe orienté $y'y$.

Supposons l'axe $x'x$ passant par l'origine A du vecteur. Le cercle de centre A et de rayon unité coupe $y'y$ en M.

On a, par définition :

$$\overline{AP} = \cos\left(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}\right).$$

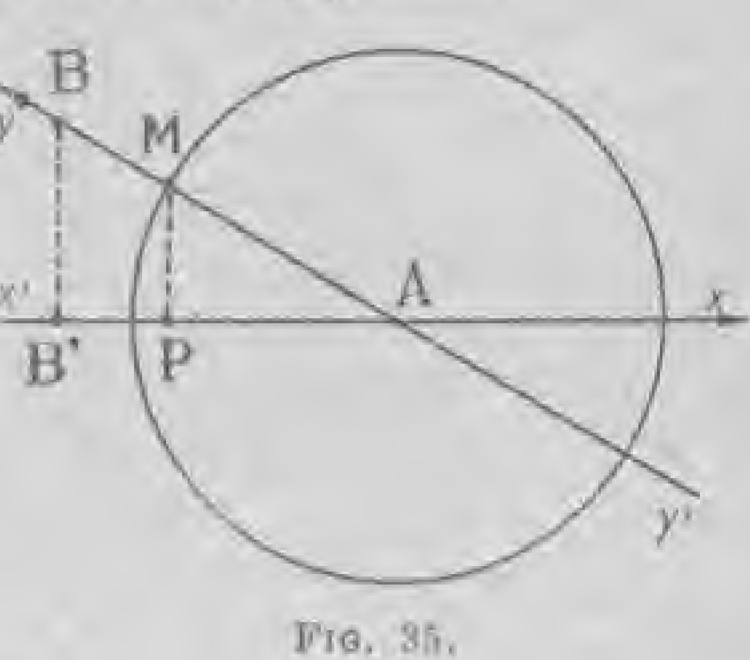


FIG. 35.

D'autre part, les triangles semblables APM et AB'B donnent :

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$$

ou

$$\frac{\cos\left(\overrightarrow{x'x}\,\overrightarrow{y'y}\right)}{\overline{AB'}} = \frac{1}{\overline{AB}}$$

$$\overline{AB'} = \overline{AB}\cos\left(\overrightarrow{x'x}\,\overrightarrow{y'y}\right).$$

La mesure algébrique de la projection d'un vecteur sur un axe x'x est égale à la mesure algébrique de ce vecteur multipliée par le cosinus de l'angle des directions positives de l'axe qui porte ce vecteur et de l'axe de projection.

FIG. 36.

31. FORMULES D'ADDITION.

Soient deux axes rectangulaires $x'Ox$ et $y'Oy$ dans le plan orienté et deux angles $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ox_1}\right) = a$ et $\left(\overrightarrow{Ox_1}, \overrightarrow{Oz}\right) = b$.

Traçons le cercle de rayon unité qui coupe Ox en A, Ox_1 en M et Oz en N et menons Oy_1 déduit de Ox_1 par rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de O.

Soient P et S les projections de N sur Ox et Ox_1.

On a, par définition, $\overline{OS} = \cos b$, $\overline{SN} = \sin b$.

On peut écrire : $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SN}$.

D'après le théorème de la projection de la somme géométrique on peut écrire :

$$\overline{\text{proj}_{Ox}\overrightarrow{ON}} = \overline{\text{proj}_{Ox}\overrightarrow{OS}} + \overline{\text{proj}_{Ox}\overrightarrow{SN}} \qquad (1)$$

Or :

$$\overline{\text{proj}_{Ox}\overrightarrow{ON}} = \overline{OP} = \cos(a+b)$$

$$\overline{\text{proj}_{Ox}\overrightarrow{OS}} = \overline{OS}\cos\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ox_1}\right) = \overline{OS}\cos a$$
$$= \cos b \cos a.$$

$$\overline{\text{proj}_{Ox}\overrightarrow{SN}} = \overline{SN}\cos\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy_1}\right) = \overline{SN}\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)$$
$$= -\sin b \sin a.$$

d'où :

$$\boldsymbol{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.}$$

Projetée sur Oy la relation (1) donne :

$$\overline{\text{proj}_{Oy}\overrightarrow{ON}} = \overline{\text{proj}_{Oy}\overrightarrow{OS}} + \overline{\text{proj}_{Oy}\overrightarrow{SN}}$$

$$\overline{\text{proj}_{Oy}\overrightarrow{ON}} = \overline{PN} = \sin(a+b)$$

$$\overline{\text{proj}_{Oy}\overrightarrow{OS}} = \overline{OS}\cos\left(\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Ox_1}\right) = \overline{OS}\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$$
$$\cos b \sin a.$$

$$\overline{\text{proj}_{Oy}\overrightarrow{SN}} = \overline{SN}\cos\left(\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oy_1}\right) = \overline{SN}\cos a$$
$$= \sin b \cos a;$$

d'où :

$$\boldsymbol{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.}$$

On en déduit :

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \dfrac{\sin b \cos a}{\cos a \cos b}}{\dfrac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \dfrac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} = \frac{\dfrac{\sin a}{\cos a} + \dfrac{\sin b}{\cos b}}{1 - \dfrac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}}$$

$$\boldsymbol{\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{1 - \text{tg}\, a\, \text{tg}\, b}.}$$

32. FORMULES DE SOUSTRACTION cos (a — b), sin (a — b), tg (a — b). — On part des formules d'addition remplaçant b par $-b$ et en remarquant que $\cos(-b) = \cos b$, $\sin(-b) = -\sin b$ et $\text{tg}(-b) = -\text{tg}\, b$.

Il vient immédiatement :

$$\boldsymbol{\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,}$$
$$\boldsymbol{\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a,}$$
$$\boldsymbol{\text{tg}(a-b) = \frac{\text{tg}\, a - \text{tg}\, b}{1 + \text{tg}\, a\, \text{tg}\, b}.}$$

33 FORMULES DE MULTIPLICATION DES ARCS.

Si l'on fait $a = b$ dans les formules d'addition $a + b = 2a$ il vient :

$$\boldsymbol{\sin 2a = 2 \sin a \cos a\ ;}$$
$$\boldsymbol{\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a}$$
$$\boldsymbol{\text{tg}\, 2a = \frac{2\, \text{tg}\, a}{1 - \text{tg}^2 a}.}$$

Ce sont les formules de multiplication.

De :

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1,$$
$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a.$$

on tire :

$$\boldsymbol{2\cos^2 a = 1 + \cos 2a}$$
$$\boldsymbol{2\sin^2 a = 1 - \cos 2a.}$$

Application. — **Connaissant cos 2a, calculer sin a et cos a**

Des formules

$$1 + \cos 2a = 2\cos^2 a$$
$$1 - \cos 2a = 2\sin^2 a,$$

on tire :

$$\cos a = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2a}{2}} \qquad \sin a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2a}{2}}$$

que l'on peut grouper de quatre manières différentes :

$$1\begin{cases} \cos a = +\sqrt{\dfrac{1+\cos 2a}{2}} \\ \sin a = +\sqrt{\dfrac{1-\cos 2a}{2}} \end{cases} \qquad 3\begin{cases} \cos a = -\sqrt{\dfrac{1+\cos 2a}{2}} \\ \sin a = -\sqrt{\dfrac{1-\cos 2a}{2}} \end{cases}$$

$$2\begin{cases} \cos a = -\sqrt{\dfrac{1+\cos 2a}{2}} \\ \sin a = +\sqrt{\dfrac{1-\cos 2a}{2}} \end{cases} \qquad 4\begin{cases} \cos a = +\sqrt{\dfrac{1+\cos 2a}{2}} \\ \sin a = -\sqrt{\dfrac{1-\cos 2a}{2}} \end{cases}$$

Ces quatre groupes de réponses s'interprètent au point de vue trigonométrique.

Les arcs de cos $2a$ rentrent dans la forme générale :

$$2a = 2k\pi + 2\alpha.$$
$$2a = 2k\pi - 2\alpha.$$

Les arcs moitié sont donc compris dans les formules générales :

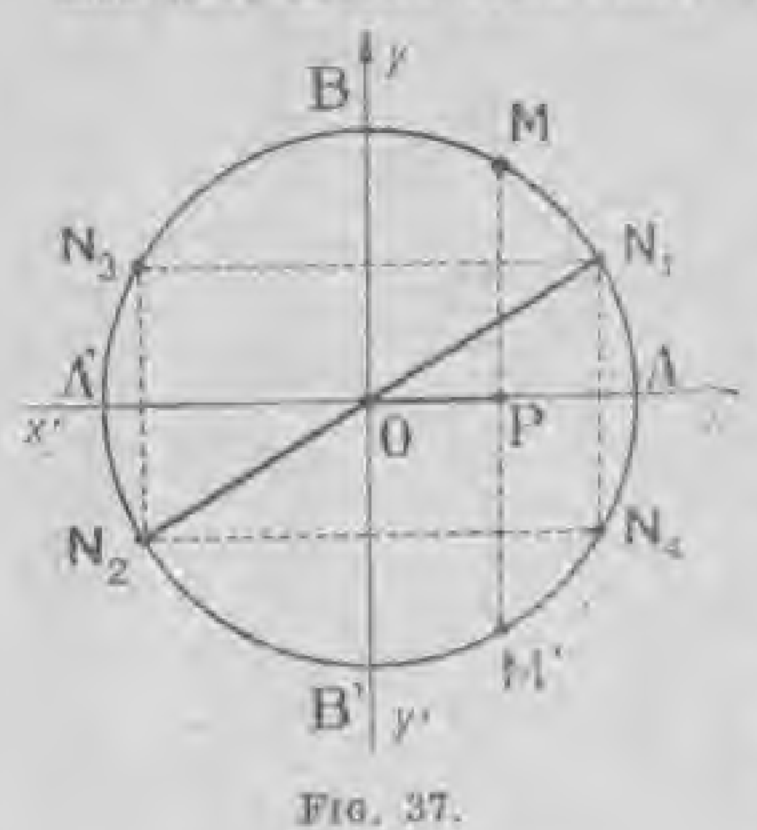


Fig. 37.

$$a = k\pi + \alpha$$

et $$a = k\pi - \alpha.$$

Si k est pair, les arcs du premier groupe sont terminés en N_1, ceux du deuxième groupe en N_4.

Si k est impair les arcs du premier groupe sont terminés en N_2 ; ceux du deuxième groupe en N_3.

On obtient donc quatre extrémités possibles pour l'arc a ; auxquelles correspondent les quatre groupes de réponses obtenues plus haut.

Remarque. — L'ambiguïté n'existe que si l'on ignore le quadrant dans lequel est terminé l'arc a ; elle cesse si l'on connaît cette position de l'extrémité.

Soient à calculer sin 105° *et cos* 105° *sachant que cos* $210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

En appliquant les formules, on aura

$$\cos^2 105° = \frac{2-\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$$

$$\sin^2 105° = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2.$$

Comme 105° est un arc du deuxième quadrant, son sinus est positif et son cosinus négatif, on devra donc prendre le signe + du radical pour le sinus et le signe — pour le cosinus

et $$\sin 105° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \cos 105° = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

34. Théorème. — ***Toutes les fonctions circulaires de l'arc a s'expriment rationnellement en fonction de*** $tg \frac{a}{2}$.

On part des formules de multiplication où l'on substitue $\frac{a}{2}$ à a.

$$\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$$

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2},$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}.$$

On peut écrire :

$$\sin a = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{1} = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}} = \frac{\dfrac{2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2}}}{\dfrac{\cos^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2}} + \dfrac{\sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2}}} = \frac{2\, tg \frac{a}{2}}{1 + tg^2 \frac{a}{2}};$$

$$\cos a = \frac{\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}} = \frac{\dfrac{\cos^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2}} - \dfrac{\sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2}}}{\dfrac{\cos^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2}} + \dfrac{\sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2}}} = \frac{1 - tg^2 \frac{a}{2}}{1 + tg^2 \frac{a}{2}}.$$

On obtiendra par division :

$$tg\ a = \frac{2\, tg \frac{a}{2}}{1 - tg^2 \frac{a}{2}}.$$

Ces trois formules donnent les trois fonctions circulaires de a en fonction de $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ par des expressions rationnelles. Il n'y a aucune ambiguïté dans les réponses. Cherchons à donner de ce fait une interprétation trigonométrique.

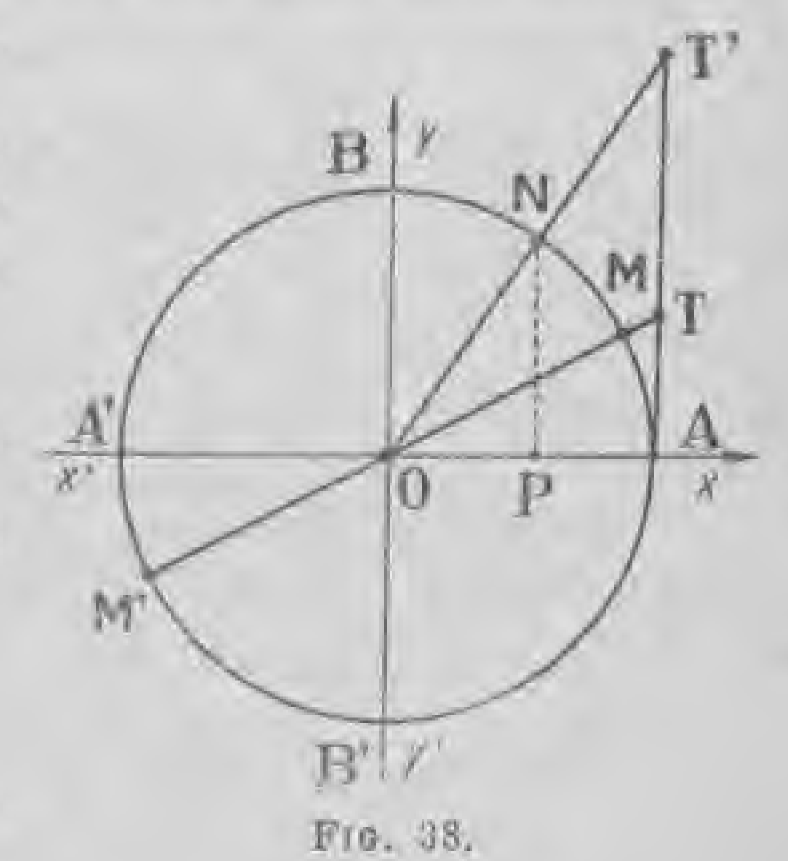


Fig. 38.

Les arcs $\frac{a}{2}$ de tangente donnée sont compris dans la forme générale

$$\frac{a}{2} = k\pi + \frac{\alpha}{2}$$

et sont terminés, soit en M, soit en M'.

L'arc double sera de la forme :

$$a = 2k\pi + \alpha$$

Tous les arcs répondant à cette formule ont la même extrémité N sur le cercle et leurs fonctions circulaires sont parfaitement déterminées. Il n'y aura qu'un groupe de réponses.

§ VI. *RELATIONS DANS LE TRIANGLE.*

35. RELATIONS DANS LE TRIANGLE RECTANGLE.

I. ***Dans tout triangle rectangle, un côté de l'angle droit est égal à l'hypoténuse multipliée par le sinus de l'angle opposé ou par le cosinus de l'angle adjacent.***

Soit ABC un triangle rectangle en A de côtés a, b et c.

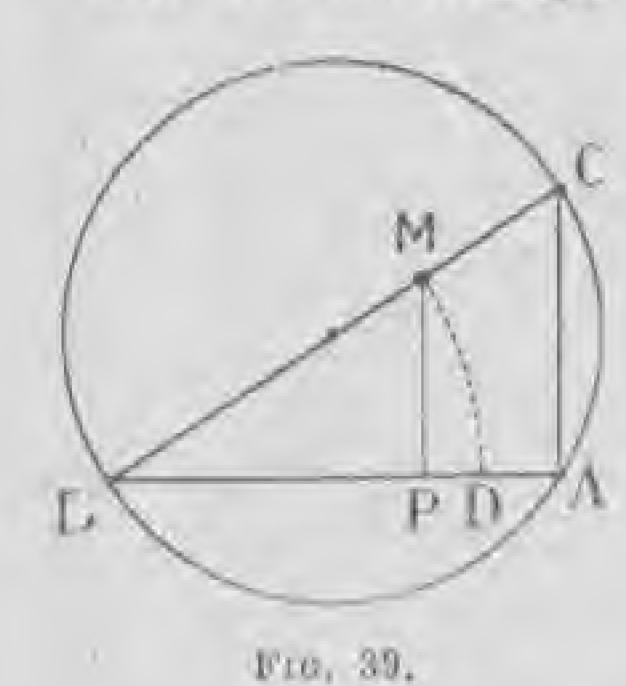


FIG. 39.

Le cercle de centre B et de rayon BM = 1 coupe le côté BC en M. Si l'on projette M en P sur BA on a, par définition.

$$\overline{BP} = \cos B \text{ et } \overline{PM} = \sin B.$$

Les triangles semblables BMP et BAC donnent :

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BM}} \text{ ou } \overline{BA} = \frac{\overline{BC}}{1}\overline{BP} ;$$

c'est-à-dire : $c = a \cos B$.

On peut encore écrire :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BM}} \quad \text{ou} \quad \overline{AC} = \frac{\overline{BC}}{1}\overline{PM} ;$$

c'est-à-dire $b = a \sin B$.

Les angles B et C sont complémentaires, on a donc :

$$\sin B = \cos C \quad \text{et} \quad \sin C = \cos B.$$

Par suite : $\boldsymbol{b = a \sin B = a \cos C}$;

$$\boldsymbol{c = a \cos B = a \sin C.}$$

II. ***Dans un triangle rectangle un côté de l'angle droit est égal à l'autre côté de l'angle droit multiplié par la tangente de l'angle opposé ou par la cotangente de l'angle adjacent.***

Divisant membre à membre les égalités ci dessus, on a :

1° $$\frac{c}{b} = \frac{a \cos B}{a \sin B} = \text{cotg } B ;$$

$$\boldsymbol{c = b \text{ cotg } B}$$

et 2° $$\frac{b}{c} = \frac{a \sin B}{a \cos B} = \text{tg } B.$$

$$\boldsymbol{b = c \text{ tg } B.}$$

de même :

$$\boldsymbol{b = c \text{ cotg } C \quad \text{et} \quad c = b \text{ tg } C.}$$

36. RELATIONS DANS UN TRIANGLE QUELCONQUE.

I. ***Dans un triangle quelconque, chaque côté est proportionnel au sinus de l'angle opposé et le rapport de proportionnalité est égal au diamètre du cercle circonscrit.***

Soit ABC un triangle quelconque de côtés a, b, c inscrit dans un cercle O de rayon R.

Menons le diamètre BOA'.

on a : $\widehat{BA'C} = \widehat{BAC} = A$,

et le triangle rectangle BA'C donne :

$$a = 2R \sin \widehat{BA'C} = 2R \sin \widehat{BAC}.$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R ;$$

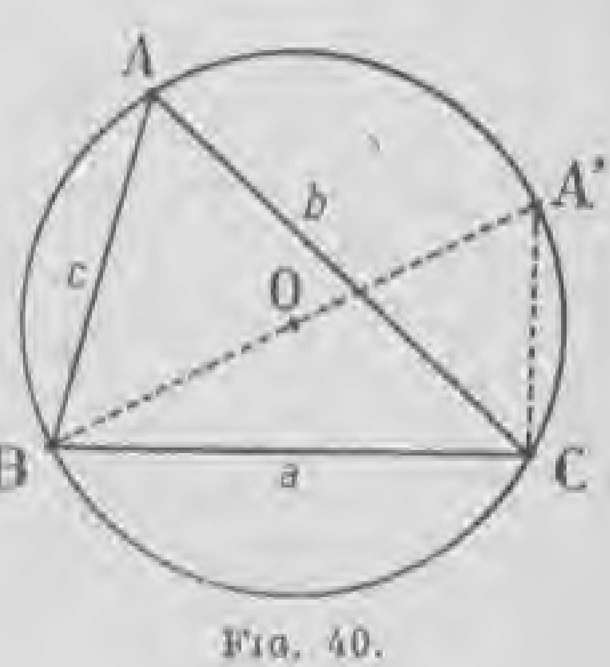


FIG. 40.

on aurait de même :

$$b = 2R \sin B$$
$$c = 2R \sin C,$$

d'où :

$$\boldsymbol{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.}$$

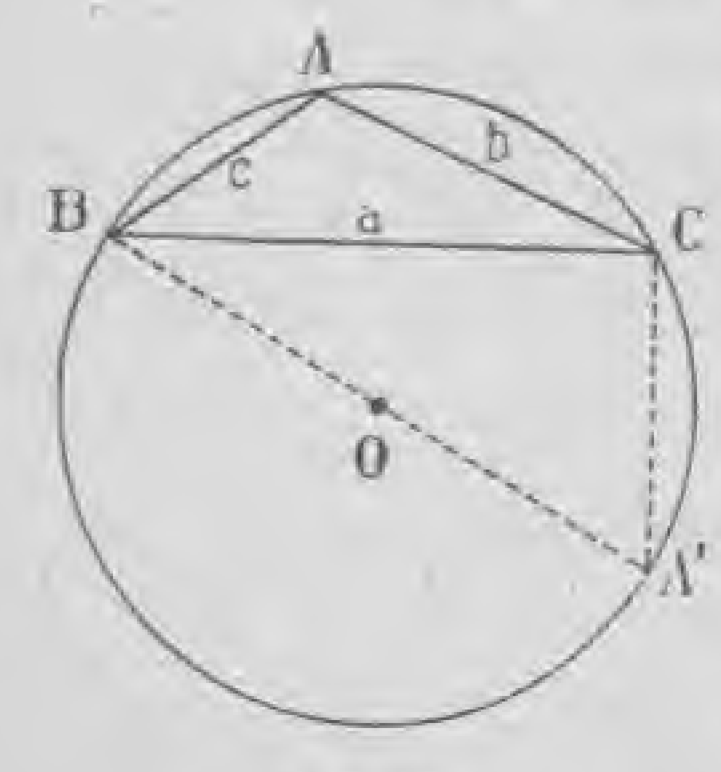


FIG. 41.

Remarque. — Si le triangle ABC possède un angle obtus, la construction précédente est en défaut, mais on voit que :

$$a = 2R \sin \widehat{BA'C}$$

et

$$\widehat{BA'C} = \pi - \widehat{BAC} = \pi - A :$$

et comme

$$\sin (\pi - A) = \sin A,$$

on a encore :

$$a = 2R \sin A.$$

II. ***Dans un triangle quelconque, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, moins deux fois le produit de ces deux côtés par le cosinus de l'angle qu'ils forment.***

Soit un triangle ABC de côtés a, b, c.

Abaissons la hauteur BH. On a :

$$\overline{BC}^2 = \overline{HB}^2 + \overline{HC}^2. \qquad (1)$$

Mais $\quad HB = AB \sin A = c \sin A.$

D'autre part, si on oriente AC de A vers C, on peut écrire :

$$\overline{HC} = \overline{HA} + \overline{AC}. \qquad (2)$$

Mais $\quad \overline{AC} = AC = b.$

De plus, *si* A *est aigu*, (fig. 42) :

$$\overline{HA} = -HA = -AB \cos A = -c \cos A ;$$

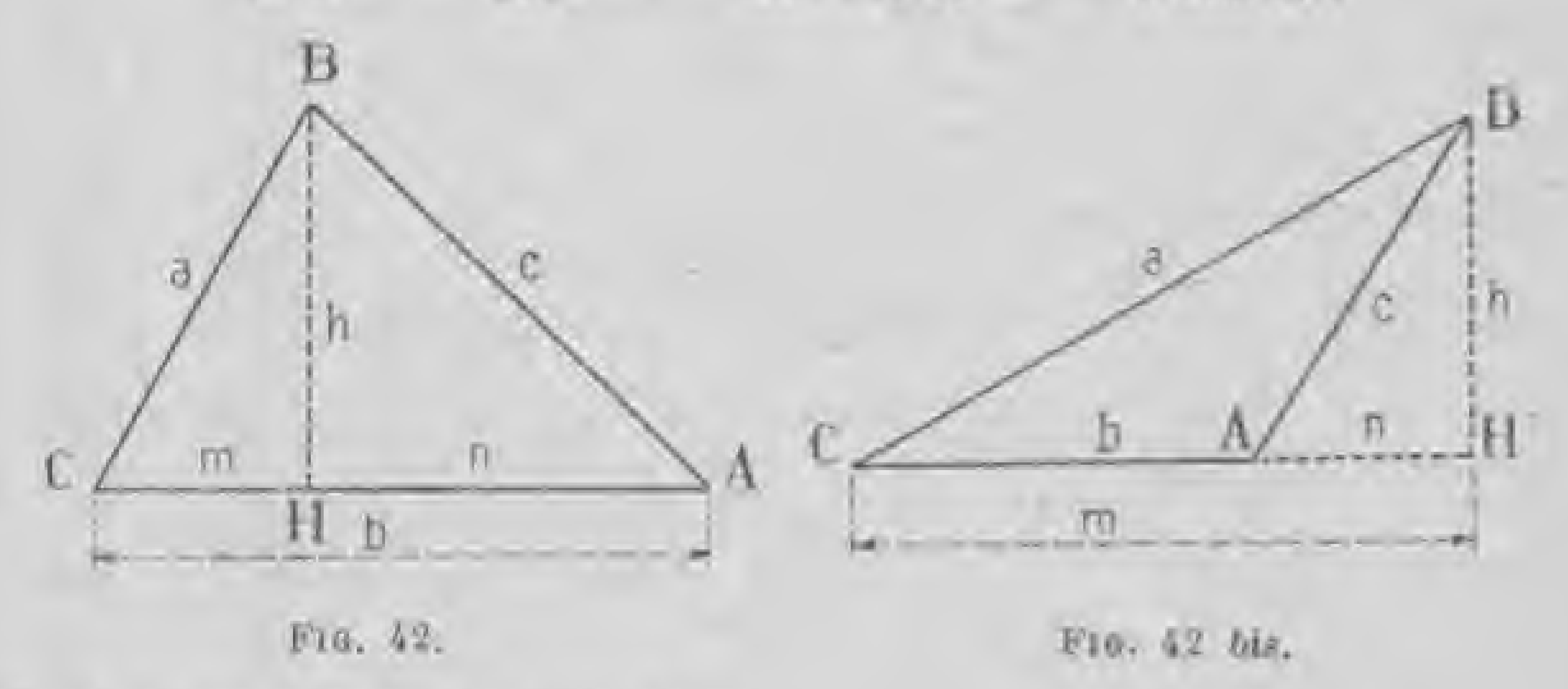


FIG. 42. FIG. 42 *bis*.

et *si* A *est obtus*, (fig. 42 *bis*) :

$$\overline{HA} = +HA = AB \cos(\pi - A) = -c \cos A.$$

Ainsi, *dans les deux cas*, la relation (2) devient :

$$\overline{HC} = b - c \cos A.$$

Les valeurs de $\overline{HB}$ et $\overline{HC}$ portées dans la relation (1) donnent :

$$\overline{BC}^2 = c^2 \sin^2 A + (b - c \cos A)^2$$

ou $\quad a^2 = b^2 + c^2(\sin^2 A + \cos^2 A) - 2bc \cos A$

ou $\quad \boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.}$

On aurait de même :

$$\boldsymbol{b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B,}$$

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.}$$

Remarque : On réunit ainsi en une seule les deux formules de la géométrie :

côté opposé à un angle aigu : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bn$ (fig. 42) ;
côté opposé à un angle obtus : $a^2 = b^2 + c^2 + 2bn$ (fig. 42 *bis*).

EXERCICES DE TRIGONOMÉTRIE

1042. Trouver sur le cercle trigonométrique les extrémités des arcs :

275° ; 453° ; + 3 642 gr ; — 2 538 gr.

1043. Trouver les fonctions circulaires suivantes :

sin 29°32′	tg 25°12′
sin 63,17 gr	tg 48,13 gr
cos 32°	cotg 52°42′
cos 41,18 gr	cotg 41,92 gr.

1044. Trouver les fonctions circulaires suivantes

sin 117°48′	sin 217,13 gr
cos 197°32′	cos 385,17 gr
tg 313°42′	tg 241,12 gr
cotg 325°41′	cotg 182,13 gr.

1045. Trouver les fonctions circulaires des arcs suivants :

— 11 220° ; 945° ; 1 650° ;

1046. En utilisant la valeur des côtés des pentagones réguliers inscrits convexe et étoilé et des décagones réguliers inscrits convexe et étoilé, calculer les fonctions circulaires de $\frac{\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{\pi}{10}$, $\frac{3\pi}{10}$.

1047. Vérifier que :

$$\sin^6 a + \cos^6 a - 2 \sin^4 a - \cos^4 a + \sin^2 a = 0$$

quel que soit a.

1048. Montrer que :

$$\sin^2 a \operatorname{tg} a + \cos^2 a \operatorname{cotg} a + 2 \sin a \cos a = \operatorname{tg} a + \operatorname{cotg} a.$$

1049. Si $2 \sin a + 3 \cos a = 2$, calculer $\sin a$, $\cos a$ et $\operatorname{tg} a$.

1050. Si $\sin a = \frac{3}{4}$, a étant un arc du premier quadrant, calculer les autres fonctions circulaires de a.

Si $\cos a = -\frac{2}{3}$, a étant un arc du troisième quadrant, calculer les autres fonctions circulaires de a.

1051. Si $\operatorname{tg} a = 2$, calculer $\sin a$ et $\cos a$.

1052. Trouver tous les arcs a tels que $\sin 5a = \frac{1}{2}$.

1053. Trouver tous les arcs a tels que $\cos a = -\frac{2}{3}$.

1054. Trouver tous les arcs a tels que $\operatorname{tg} 2a = -1$.

Équations simples

Résoudre les équations :

1055. $$\sin x = \sin \frac{2\pi}{3}.$$

1056. $$\cos x = \cos \frac{3\pi}{5}.$$

1057. $$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{4\pi}{7}.$$

1058. $$\sin 3x = \sin \left(\frac{\pi}{3} + x\right).$$

1059. $$\cos 2x = \cos \left(\frac{2\pi}{5} - x\right).$$

1060. $$\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} \frac{2x}{5}.$$

1061. $$\sin 3x = - \cos 2x.$$

1062. $$\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 2xy = 0,$$
$$\sin 2x - \sin y = 0.$$

1063. $$\cos 2x = \cos y,$$
$$\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2y = 0.$$

Formules d'addition, de soustraction et de multiplication

1064. Calculer les fonctions circulaires de

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}.$$

1065. Calculer $\sin(a + b + c)$, $\cos(a + b + c)$, $\operatorname{tg}(a + b + c)$.

1066. Calculer $\cos 3a$ en fonction de $\cos a$, $\sin 3a$ en fonction de $\sin a$, $\operatorname{tg} 3a$ en fonction de $\operatorname{tg} a$.

1067. Si $\cos 2a = \frac{2}{3}$, calculer $\sin a$ et $\cos a$. Quelles sont les réponses acceptables si l'arc $2a$ est terminé dans le quatrième quadrant.

1068. Calculer $\operatorname{tg} a$ en fonction de $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$. Interpréter les résultats obtenus

1069. Vérifier que

$$\sin(a + b)\sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b,$$
$$\cos(a + b)\cos(a - b) = \cos^2 b - \sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 b,$$
$$\cos^2(a + b) + \cos^2 b - 2\cos(a + b)\cos a \cos b = \sin^2 a.$$

1070. Vérifier que si $A + B + C = \pi$

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

1071. Calculer $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tg} a$ connaissant $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = 2 - \sqrt{3}$.

1072. Vérifier que

$$\sin 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}.$$

1073. Vérifier que

$$\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0.$$

1074. Vérifier que

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 3 \operatorname{tg} 3x.$$

Résolution des triangles

1075. Démontrer que dans un triangle quelconque ABC

$$a = b \cos C + c \cos B.$$

1076. Calculer le rayon du cercle inscrit dans un triangle quelconque en fonction de deux angles et du côté adjacent.

1077. Calculer la surface d'un triangle connaissant deux côtés et l'angle compris.

1078. Vérifier que dans tout triangle,

$$a \sin(B - C) + b \sin(C - A) + c \sin(A - B) = 0;$$
$$\frac{a^2 - b^2}{c^2} = \frac{\sin(A - B)}{\sin C}.$$

1079. Dans un triangle rectangle ABC, on donne l'hypoténuse $a = 12$ m et l'angle $B = 75^\circ$. Calculer b et c.

1080. Dans un triangle ABC, rectangle en A, $b = 13,25$ m. et $B = 27^\circ$. Calculer a et c.

1081. Un triangle quelconque est inscrit dans un cercle de rayon $R = 5,20$ m. Les angles A et B valent respectivement 45° et 60°. Calculer les côtés du triangle.

1082. Un triangle ABC est tel que $a = 12,50$ m ; $b = 13,20$ m et $C = 72^\circ$? Calculer le côté c.

§ VII. ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES.

Dans certaines équations, l'inconnue figure par l'intermédiaire d'une ou plusieurs fonctions circulaires. Pour la résoudre on la ramène à une équation où ne figure qu'une seule fonction circulaire et on la résoud comme une équation algébrique ordinaire. On discute ensuite, s'il y a lieu, le résultat trouvé.

38. 1er Exemple. — *Résoudre l'équation*

$$4 \sin x + 3 \cos x = 0$$

On peut diviser pour cos x, car cos $x = 0$ ne vérifie pas l'équation
En effet, cos $x = 0$ entraîne sin $x = \pm 1$ qui substitue dans (1) ne la vérifie pas

On a donc
$$4 \operatorname{tg} x + 3 = 0$$
d'où
$$\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4} = -0{,}75$$
or
$$\operatorname{tg} 36^\circ 53' = 0{,}75\ ;$$
Les arcs x sont donc compris dans la forme générale

$$x = K\pi + \alpha \qquad \text{avec } \alpha = -36^\circ 53'.$$

39. 2e Exemple. — *Résoudre l'équation*

$$4 \cos x + 3 \sin x = 5.$$

Sin x et cos x s'expriment rationnellement en fonction de tg $x/2$.
On aura

$$\frac{4\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + \frac{6 \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 5$$

ou
$$9 \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 6 \operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1 = 0$$
et
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{3}.$$

Les arcs $\frac{x}{2}$ sont compris dans la forme générale

$$k\pi + \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = 13^\circ 27'.$$

Les arcs x sont de la forme $2k\pi + 2\alpha$.

40. 3e Exemple. — *Résoudre l'équation*

$$3 \sin^2 x - 13 \sin x + 5 = 0.$$

C'est une équation du second degré où l'inconnue serait sin x

$$\sin x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 120}}{12} = \frac{13 \pm 7}{12}.$$

La racine $\frac{20}{12} = \frac{5}{3}$ est à rejeter comme supérieure à 1.

La racine $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ est acceptable et donne pour x les arcs

$$2\,K\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad 2\,K\pi + \frac{5\pi}{6}.$$

41. 4e Exemple. — *Résoudre l'équation*

$$(m - 1) \sin^2 x + 2(m + 5) \sin x - (m - 2) = 0$$

et discuter le nombre des racines suivant les valeurs de m.
Équation du second degré où l'inconnue est sin x.

Le discriminant est $\Delta = (m + 5)^2 + (m - 1)(m - 2)$
$= 2m^2 + 7m + 27$

et
$$\sin x = \frac{-(m + 5) \pm \sqrt{2m^2 + 7m + 27}}{m - 1}.$$

Pour que la racine soit acceptable, il faut qu'elle soit comprise entre -1 et $+1$.
On conduit la discussion comme pour le trinôme du second degré: $\Delta = 2m^2 + 7m + 27$ toujours positif.

$$af(-1) = (m - 1)(-2m - 9) > 0 \quad \text{pour } -\frac{9}{2} < m < +1$$

$$\frac{S}{2} - (-1) = -\frac{m + 5}{m - 1} - (-1) = \frac{-6}{m - 1} > 0 \text{ pour } m < 1$$

$$af(1) = (m - 1)(2m + 11) > 0 \qquad \text{pour } m < -\frac{11}{2} \qquad 1 < m$$

$$\frac{S}{2} - 1 = -\frac{m + 5}{m - 1} - 1 = \frac{-2m - 4}{m - 1} > 0 \quad \text{pour } -2 < m < 1.$$

D'où le tableau où $u = \sin x$. Les valeurs acceptables sont soulignées.

m	Δ	$af(-1)$	$\frac{S}{2}-(-1)$	$af(1)$	$\frac{S}{2}-1$	
$-\infty$						$\begin{cases} u' = -1-\sqrt{2} \\ \underline{u}'' = -1+\sqrt{2} \end{cases}$
	+	—	+	+	—	$u' < -1 < \underline{u}'' < 1$ 1 racine acceptable
$-\frac{11}{2}$						$u' = -\frac{15}{13}$ $u'' = 1$
	+	—	+	—	—	$u' < -1 < 1 < u''$ aucune racine acceptable
$-\frac{9}{2}$						$\underline{u}' = -1$ $u'' = \frac{13}{11}$
	+	+	+	—	—	$-1 < \underline{u}' < 1 < u''$ 1 racine acceptable
-2						$\begin{cases} \underline{u}' = \frac{3-\sqrt{21}}{3} \\ u'' = \frac{3+\sqrt{21}}{3} \end{cases}$
	+	+	+	—	+	$-1 < \underline{u}' < 1 < u''$ 1 racine acceptable
1						$\underline{u}' = -\frac{1}{12}$ $u'' = \infty$
	+	—	—	+	—	$u' < -1 < \underline{u}'' < 1$ 1 racine acceptable
$+\infty$						$\begin{cases} u' = -1-\sqrt{2} \\ \underline{u}'' = -1+\sqrt{2} \end{cases}$

42. 5ᵉ Exemple. — *On donne un quart de cercle OAB de rayon 1 ; d'un point M quelconque, on abaisse les perpendiculaires MP et MQ sur OA et OB : déterminer M de telle manière que*

$$2\overline{PM} + 3\overline{QM} = 1.$$

l étant une longueur donnée.

Fig. 43.

Prenons pour inconnue $\widehat{AOM} = x$,

$$\overline{PM} = \sin x, \quad \overline{QM} = \cos x.$$

L'équation proposée devient :

$$2 \sin x + 3 \cos x = l.$$

Si l'on prend pour inconnue auxiliaire $\quad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$

on aura, $$\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + \frac{3\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = l.$$

ou $$\boldsymbol{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}(l+3) - 4\operatorname{tg}\frac{x}{2} + (l-3) = 0.}$$

qui admet comme solution $\quad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = z = \frac{2 \pm \sqrt{13-l^2}}{l+3}.$

Discussion. — L'angle x varie entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, l'angle $\frac{x}{2}$ entre 0 et $\frac{\pi}{4}$ et $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$ devra être comprise entre 0 et 1.

$\Delta = 13 - l^2 > 0 \qquad$ pour $\quad -\sqrt{13} < l < \sqrt{13}$

$af(0) = l^2 - 9 > 0 \qquad$ pour $\quad l < -3$ ou $3 < l$

$\frac{S}{2} - 0 = \frac{2}{l+3} > 0 \qquad$ pour $\quad l > -3$;

$af(1) = (l+3)(2l-4) > 0 \qquad l < -3$ ou $2 < l$

$\frac{S}{2} - 1 > 0 : \frac{2}{l+3} - 1 = -\frac{l+1}{l+3} > 0 \quad -3 < l < -1$

l	Δ	$af(0)$	$\frac{S}{2}$	$af(1)$	$\frac{S}{2}-1>0$	
0						$z = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{2}$
	+	—	+	—	—	$z' < 0 < 1 < z''$ aucune racine acceptable
2						$\underline{z}' = -\frac{1}{5}$ $z'' = 1$
	+	—	+	+	—	$z' < 0 < \underline{z}'' < 1$ 1 racine acceptable
3						$\underline{z}' = 0$ $\underline{z}'' = \frac{2}{3}$
	+	+	+	+	—	$0 < \underline{z}' < \underline{z}'' < 1$ 2 racines acceptables
$\sqrt{13}$						$\underline{z}' = \underline{z}'' = \frac{\sqrt{13}-3}{2}$
	—	+	+	+	—	aucune racine
$+\infty$						

l étant une longueur, seules les valeurs positives sont à considérer

43. Problème.

Étant donné un triangle ABC rectangle en A, on désigne par α l'angle aigu des médianes BM et CN issues de B et C.

Calculer les tangentes des angles $\widehat{ABM}$ et $\widehat{ACN}$ en fonction de B; en déduire tg α.

Calculer l'angle B connaissant α. Discuter.

Dans le triangle rectangle ABM on a

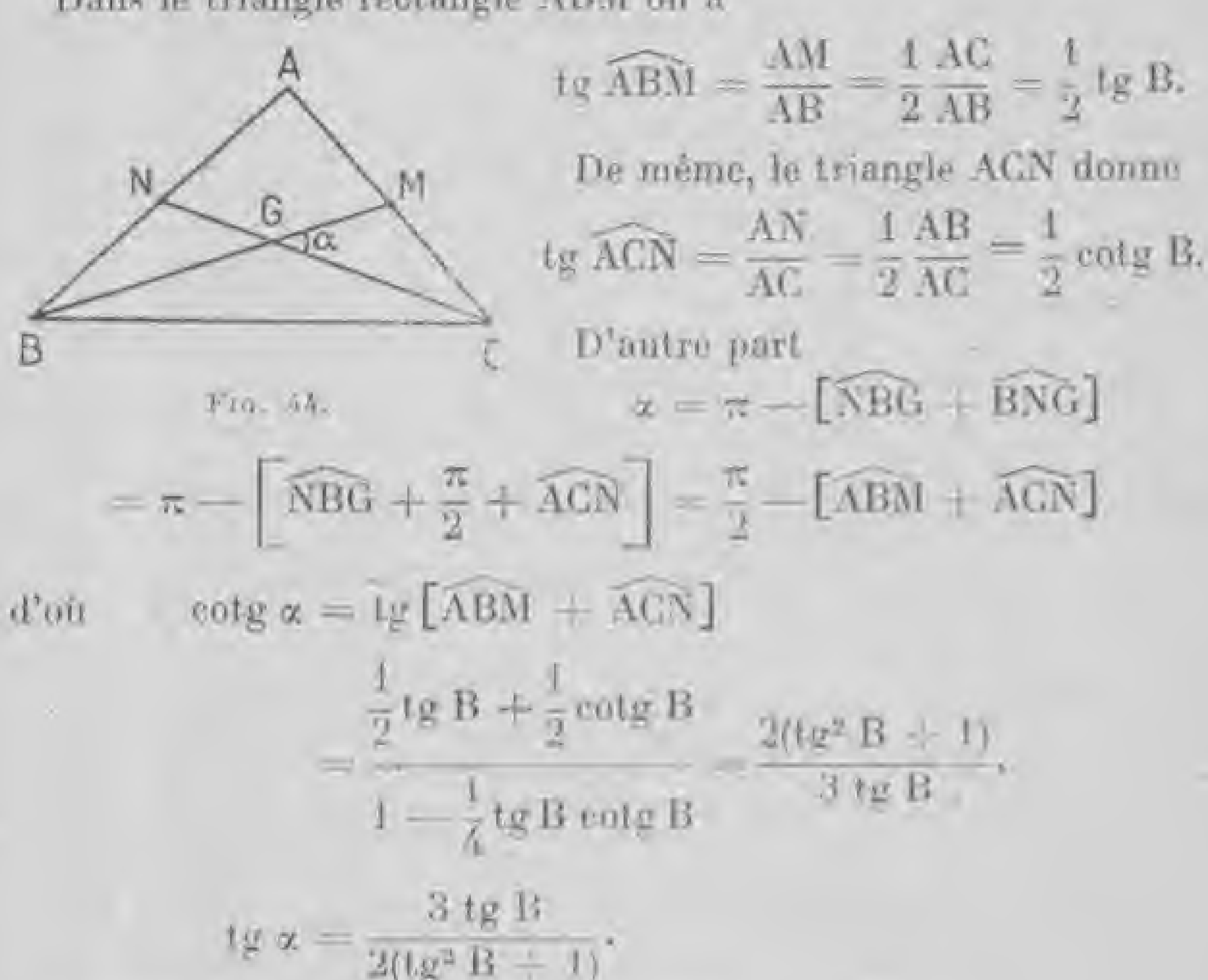


Fig. 54.

$$\text{tg}\,\widehat{ABM} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}\,\text{tg}\,B.$$

De même, le triangle ACN donne

$$\text{tg}\,\widehat{ACN} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}\,\text{cotg}\,B.$$

D'autre part

$$\alpha = \pi - [\widehat{NBG} + \widehat{BNG}]$$

$$= \pi - \left[\widehat{NBG} + \frac{\pi}{2} + \widehat{ACN}\right] = \frac{\pi}{2} - [\widehat{ABM} + \widehat{ACN}]$$

d'où $\quad \text{cotg}\,\alpha = \text{tg}\,[\widehat{ABM} + \widehat{ACN}]$

$$= \frac{\frac{1}{2}\text{tg}\,B + \frac{1}{2}\text{cotg}\,B}{1 - \frac{1}{4}\text{tg}\,B\,\text{cotg}\,B} = \frac{2(\text{tg}^2 B + 1)}{3\,\text{tg}\,B},$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{3\,\text{tg}\,B}{2(\text{tg}^2 B + 1)}.$$

L'angle B sera donné par l'équation

$$2\,\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}^2 B - 3\,\text{tg}\,B + 2\,\text{tg}\,\alpha = 0$$

$$\text{tg}\,B = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16\,\text{tg}^2\alpha}}{4\,\text{tg}\,\alpha}.$$

Discussion. — B devant être un angle aigu, les racines devront être réelles et positives.

$$\Delta = 9 - 16\,\text{tg}^2\alpha \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad -\frac{3}{4} \leqslant \text{tg}\,\alpha \leqslant \frac{3}{4}.$$

$$P = 1 \quad \text{toujours positif ;} \quad S = \frac{3}{2\,\text{tg}\,\alpha} > 0 \quad \text{puisque} \quad \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Il faut donc

$$\text{tg}\,\alpha \leqslant \frac{3}{4} \quad \text{ou} \quad \alpha \leqslant 36^\circ\,52'$$

Il y a alors deux réponses acceptables ; elles sont telles que

$$\text{tg}\,B'\,\text{tg}\,B'' = 1$$

ou

$$B' + B'' = \frac{\pi}{2}.$$

Les deux réponses correspondent à des angles complémentaires donnant le même triangle rectangle.

EXERCICES

Résoudre et discuter s'il y a lieu, les équations :

1. $3\sin^2 x - 2\sin x - 2 = 0.$

2. $4\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0.$

3. $2\sin x + 3\cos x = 1.$

4. $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 2\cos^2 x = \frac{1}{2}.$

5. $(m-1)\sin^2 x - 2(m+1)\sin x - 1 = 0.$

6. $(m-1)\sin x + (m+1)\cos x - 2m = 0.$

7. $(m+2)\sin 2x + (m-1)\cos 2x = m+1$

avec $\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$

8. $\text{cotg}\,x + m\,\text{tg}\,x - 2m - 3 = 0.$

9. Dans un triangle ABC, l'angle A est le double de l'angle B et le rapport des côtés $\frac{AB}{BC}$ et égal à $\frac{11}{9}$. Trouver l'angle B.

10. Par le milieu C d'un arc AB d'un cercle, on mène la corde CD parallèle au rayon OA. Calculer l'angle AOC de manière que la corde CD soit partagée en deux parties égales par la corde AB.

11. On donne un demi-cercle de diamètre AB et de rayon R. Trouver sur le demi-cercle un point M ($\widehat{BOM} = x$) tel que la tangente en M coupe le diamètre AB prolongé en un point D tel que MD = k.AM. Discuter.

o/	Sinus nat.	Tang. nat.	Arcs	o/	Sinus nat.	Tang. nat.	Arcs
1	0,017 452	0,017 455	0,017 453	46	0,719 340	1,035 530	0,802 851
2	0,034 899	0,034 921	0,034 907	47	0,731 354	1,072 369	0,829 305
3	0,052 336	0,052 408	0,052 360	48	0,743 145	1,110 613	0,837 758
4	0,069 756	0,069 927	0,069 813	49	0,754 710	1,150 368	0,855 211
5	0,087 156	0 087 489	0,087 266	50	0,766 044	1,191 754	0,872 665
6	0,104 528	0,105 104	0,104 720	51	0,777 146	1,234 897	0,890 118
7	0,121 869	0,122 785	0,122 173	52	0,788 011	1,279 942	0,907 571
8	0,139 173	0,140 541	0,139 626	53	0,798 636	1,327 045	0,925 025
9	0,156 434	0,158 384	0,157 080	54	0,809 017	1,376 382	0,942 478
10	0 173 648	0,176 327	0,174 533	55	0,819 152	1,428 148	0,959 931
11	0,190 809	0,194 380	0,191 986	56	0,829 038	1,482 561	0,977 384
12	0,207 912	0,212 557	0,209 440	57	0,838 671	1,539 865	0,994 838
13	0,224 951	0,230 868	0,226 893	58	0,848 048	1,600 335	1,012 291
14	0,241 922	0,249 328	0,244 346	59	0,857 167	1,664 279	1,029 744
15	0,258 819	0,267 949	0,261 799	60	0,866 025	1,732 051	1,047 198
16	0,275 637	0,286 745	0,279 253	61	0,874 620	1,804 048	1,064 651
17	0,292 372	0,305 731	0,296 706	62	0,882 948	1,880 726	1,082 104
18	0,309 017	0,324 920	0,314 159	63	0,891 007	1,962 611	1,099 557
19	0,325 568	0,344 328	0,331 613	64	0,898 794	2,050 304	1,117 011
20	0,342 020	0,363 970	0,349 066	65	0,906 308	2,144 507	1,134 464
21	0,358 568	0,383 864	0,366 519	66	0,913 545	2 246 037	1,151 917
22	0,374 607	0,404 026	0,383 972	67	0,920 505	2,355 852	1,169 371
23	0,390 731	0,424 475	0,401 426	68	0,927 184	2,475 087	1,186 824
24	0,406 737	0,445 229	0,418 879	69	0,933 580	2,605 089	1,204 277
25	0,422 618	0,466 308	0,436 332	70	0,939 693	2,747 477	1,221 730
26	0,438 371	0,487 733	0,453 786	71	0,945 519	2,904 211	1,239 184
27	0,453 990	0,509 525	0,471 239	72	0,951 057	3,077 684	1,256 637
28	0,469 472	0,531 709	0,488 692	73	0,956 305	3,270 853	1,274 090
29	0,484 810	0,554 309	0,506 145	74	0,961 262	3,487 414	1,291 544
30	0,500 000	0,577 350	0,523 599	75	0,965 926	3,732 051	1,308 997
31	0,515 036	0,600 861	0,541 052	76	0,970 296	4,010 781	1,326 450
32	0,529 919	0,624 869	0,558 505	77	0,974 370	4,331 476	1,343 904
33	0,544 639	0,649 408	0,575 959	78	0,978 148	4,704 630	1,361 357
34	0,559 193	0,674 509	0,593 412	79	0,981 627	5,144 554	1,378 810
35	0,573 576	0,700 208	0,610 865	80	0,984 808	5,671 282	1,396 263
36	0,587 785	0,726 543	0,628 319	81	0,987 688	6,313 752	1,413 717
37	0,601 815	0,752 554	0,645 772	82	0,990 268	7,115 370	1,431 170
38	0,615 661	0,781 286	0,663 225	83	0,992 546	8,144 346	1,448 623
39	0,629 320	0,809 784	0,680 678	84	0,994 522	9,514 364	1,466 077
40	0,642 788	0,839 100	0,698 132	85	0,996 195	11,430 052	1,483 530
41	0,656 059	0,869 287	0,715 585	86	0,997 564	14,300 666	1,500 983
42	0,669 131	0,900 404	0,733 038	87	0,998 630	19,081 137	1,518 436
43	0,681 998	0,932 515	0,750 492	88	0,999 391	28,636 253	1,535 890
44	0,694 658	0,965 689	0,767 945	89	0,999 848	57,289 962	1,553 343
45	0,707 107	1,000 000	0,785 398	90	1,000 000	+ ∞	1,570 796

γ/	Sin. nat.	Tang. nat.	Arcs	γ/	Sin. nat.	Tang. nat.	Arcs
1	0,01 571	0,01 571	0,01 571	51	0,71 813	1,03 192	0,80 111
2	0,03 141	0,03 143	0,03 14	52	0,72 897	1,06 489	0,81 681
3	0,04 711	0,04 716	0,04 712	53	0,73 963	1,09 899	0,83 252
4	0,06 279	0,06 291	0,06 28	54	0,75 011	1,13 428	0,84 823
5	0,07 846	0,07 870	0,07 854	55	0,76 041	1,17 085	0,86 394
6	0,09 411	0,09 453	0,09 425	56	0,77 051	1 20 879	0 87 965
7	0,10 973	0,11 040	0,10 996	57	0,78 043	1,24 820	0,89 535
8	0,12 533	0,12 633	0 12 566	58	0,79 016	1,28 919	0,91 106
9	0,14 090	0,14 232	0,14 137	59	0,79 968	1,33 187	0,92 677
10	0,15 643	0,15 838	0,15 708	60	0,80 902	1,36 637	0,94 248
11	0,17 193	0,17 453	0,17 279	61	0,81 815	1,42 286	0,95 819
12	0,18 738	0,19 076	0,18 850	62	0,82 708	1,47 146	0,97 389
13	0,20 279	0,20 709	0,20 420	63	0,83 581	1,52 235	0,98 960
14	0 21 814	0,22 353	0,21 991	64	0,84 433	1,57 575	1,00 531
15	0,23 345	0,24 008	0,23 562	65	0,85 264	1,63 185	1,02 102
16	0,24 869	0,25 676	0,25 133	66	0,86 074	1,69 091	1,03 673
17	0,26 387	0,27 357	0,26 704	67	0,86 863	1,75 319	1,05 243
18	0,27 899	0,29 053	0,28 274	68	0,87 631	1,81 899	1,06 814
19	0,29 404	0,30 764	0,29 845	69	0,88 377	1,88 867	1,08 385
20	0,30 902	0,32 492	0,31 416	70	0,89 101	1,96 261	1,09 956
21	0,32 392	0,34 238	0,32 987	71	0,89 803	2,04 125	1,11 527
22	0,33 874	0,36 002	0,34 558	72	0,90 483	2,12 511	1,13 097
23	0,35 347	0,37 787	0,36 128	73	0,91 140	2,21 475	1,14 668
24	0,36 812	0,39 593	0,37 699	74	0,91 775	2,31 086	1,16 239
25	0,38 268	0,41 421	0,39 270	75	0,92 388	2,41 421	1,17 810
26	0,39 715	0,43 274	0,40 841	76	0,92 978	2,52 571	1,19 381
27	0,41 151	0,45 152	0,42 412	77	0,93 544	2,64 642	1,20 951
28	0,42 578	0,47 056	0,43 982	78	0,94 088	2,77 761	1,22 522
29	0,43 994	0,48 989	0,45 553	79	0,94 609	2,92 076	1,24 093
30	0,45 399	0,50 953	0,47 124	80	0,95 106	3,07 768	1,25 664
31	0,46 793	0,52 947	0,48 695	81	0,95 579	3,25 055	1,27 235
32	0,48 175	0,54 975	0,50 265	82	0,96 029	3,44 202	1,28 805
33	0,49 546	0,57 039	0,51 836	83	0,96 456	3,65 538	1,30 376
34	0,50 904	0,59 140	0,53 407	84	0,96 858	3,89 474	1,31 947
35	0,52 250	0,61 280	0,54 978	85	0,97 237	4,16 530	1,33 518
36	0,53 583	0,63 462	0,56 549	86	0,97 592	4,47 374	1,35 088
37	0,54 902	0,65 688	0,58 119	87	0,97 922	4,82 882	1,36 659
38	0,56 208	0,67 960	0,59 690	88	0,98 229	5,24 218	1,38 230
39	0,57 501	0,70 281	0,61 261	89	0,98 511	5,72 974	1,39 801
40	0,58 779	0,72 654	0,62 832	90	0,98 769	6,31 375	1,41 372
41	0,60 042	0,75 082	0,64 433	91	0,99 002	7,02 637	1,42 942
42	0,61 291	0,77 568	0,65 973	92	0,99 211	7,91 582	1,44 513
43	0,62 524	0,80 115	0,67 544	93	0,99 396	9,05 789	1,46 084
44	0,63 742	0,82 727	0,69 115	94	0,99 556	10,57 889	1,47 655
45	0,64 945	0,85 408	0,70 686	95	0,99 692	12,70 620	1,49 226
46	0,66 131	0,88 162	0,72 257	96	0,99 803	15,89 454	1,50 796
47	0,67 301	0,90 993	0,73 827	97	0,99 889	21,20 495	1,52 367
48	0,68 455	0,93 906	0,75 398	98	0,99 951	31,82 052	1,53 938
49	0,69 591	0,96 907	0,76 969	99	0,99 988	64,65 674	1,55 509
50	0,70 [illegible]	1,00 00	0,78 540	100	1,00 000	+ ∞	1,57 080

PROBLÈMES DE RÉVISION

I. Équations et variations des fonctions.

1083. On considère l'équation du second degré dont les coefficients dépendent du paramètre m :

$$(2m - 1)x^2 - (m + 1)x + m - 2 = 0.$$

1° Discuter, selon les valeurs de m, l'existence et le signe des racines de cette équation.

Soient M′ et M″ les points dont les abscisses sont les racines x' et x'' de l'équation.

2° Déterminer m pour que les points M′ et M″ soient symétriques par rapport au point d'abscisse $+ 1$. Déterminer ces points.

3° Déterminer m pour que M′ et M″ soient conjugués harmoniques par rapport aux points d'abscisses $- 1$ et $+ 1$.

4° Montrer que, quel que soit m, les points M′ et M″ sont conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes que l'on déterminera.

5° En déduire l'existence de deux valeurs de m pour lesquelles l'équation a une racine double que l'on calculera. (Grenoble.)

1084. Soit l'équation en x :

$$(1 - \lambda)x^2 - 2(1 + \lambda)x + 3(1 + \lambda) = 0.$$

1° Pour quelles valeurs λ_1 ou λ_2 de λ l'équation a-t-elle une racine double ? Quelles sont les valeurs X_1 et X_2 correspondantes ?

2° λ étant extérieur à l'intervalle λ_1, λ_2, l'équation a deux racines distinctes x' et x''. Montrer qu'il existe entre x' et x'' une relation indépendante de λ. En déduire X_1 et X_2.

3° Sur un axe orienté on marque les points A, B, C, D définis par

$$\overline{OA} = X_1, \quad \overline{OB} = X_2, \quad \overline{OC} = x', \quad \overline{OD} = x'',$$

le milieu I de AB et le milieu H de CD. Établir les relations

$$\overline{IA}.\overline{IB} = -\overline{IC}.\overline{ID},$$

$$\overline{HA}.\overline{HB} = -\overline{HC}.\overline{HD}.$$

$$\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{2}{\overline{AB}}.$$

(Grenoble.)

1085. 1° Calculer deux nombres positifs x et y, connaissant leur produit k^2 et leur somme h : si on suppose k fixe, que peut-on dire des deux nombres x et y quand leur somme est minima ?

2° On considère alors l'équation

$$f(x) = (m^2 - m - 2)x^2 + (2m^2 - 2m + 5)x + (m^2 - m - 2) = 0.$$

Montrer qu'elle a des racines quel que soit m : ces racines sont des fonctions homographiques de m : trouver leurs valeurs.

3° Comment faut-il choisir m pour que ces racines soient positives, et, dans ce cas, quelle valeur faut-il donner à m pour que la somme des racines soit minima ? Quelles sont alors les racines ?

4° Si on résout l'équation par rapport à m, on obtient des valeurs rationnelles en x. Ce résultat peut-il être prévu d'après le 2° ?

5° Montrer que le polynôme $f(x)$ peut être décomposé en un produit de deux facteurs dont chacun est du 1er degré par rapport à chacune des lettres m et x. (Alger.)

(L'ordre des parties peut être modifié.)

1086. 1° On considère l'équation

$$(1 - m)x^2 + mx + 2(m - 2) = 0. \qquad (E)$$

Montrer que cette équation a toujours des racines, distinctes ou non. Les calculer.

2° Soit la fonction $y = (1 - m)x^2 + mx + 2(m - 2)$.

Montrer que quel que soit m, les courbes (P) représentant les variations de cette fonction passent par deux points fixes A et B dont on déterminera les coordonnées. En déduire une preuve de l'existence des racines de l'équation (E).

3° Déterminer m pour que la fonction ait une dérivée égale à $- 2$ pour $x = 2$.

Former l'équation de la courbe correspondante, construire cette courbe (c) et vérifier qu'elle passe par les points A et B.

4° m ayant la valeur déterminée dans 3°, calculer les fonctions circulaires de l'angle θ que fait la direction positive Ox avec la tangente à la courbe (c) au point d'abscisse 2. (Guyane.)

1087. 1° Déterminer les coefficients a, b, c de manière que la fonction $y = ax^2 + bx + c$ prenne, pour $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$ les valeurs respectives $y = 4$, $y = 0$, $y = -2$.

Étudier en ce cas les variations de la fonction y et construire la courbe représentative (P).

2° Former l'équation d'une droite passant par le point K de coordonnées $x = 1$, $y = -1$ et qui coupe la courbe (P) en deux points A et B ayant pour milieu le point K. Trouver les coordonnées des points A et B et celles du point T où se coupent les tangentes en A et B à la courbe (P).

3° Soient M′, M″ les points où une sécante de pente m menée par le point K coupe la courbe (P).

Vérifier que les droites joignant les points M′, M″ au point $x = 0$, $y = -2$ sont rectangulaires quel que soit m.

1088. Ox et Oy désignant deux axes de coordonnées rectangulaires, on considère la parabole C_m représentative des variations de la fonction

$$y = x^2 + (m + 1)x + m^2 - 1,$$

m désignant un paramètre variable.

1° Montrer qu'il existe deux courbes C_m tangentes à l'axe Ox.

2° On considère la courbe K d'équation $y = \frac{3}{4}x^2 + x - 1$. Montrer que K et toute courbe C_m n'ont qu'un point commun et ont même tangente en ce point.

Représenter graphiquement K, la courbe particulière C_1 et la tangente au point commun, l'unité de longueur étant égale à 3 cm.

3° Calculer en fonction de m les coordonnées x_0, y_0 du point M d'ordonnée minimum de la parabole C_m. Montrer qu'il existe une relation indépendante de m entre x_0 et y_0 ; que peut-on en conclure pour le point M ?

4° En se bornant à considérer les valeurs de m pour lesquelles C_m coupe la parabole représentative de $y = -x^2$ en deux points P, Q, déterminer les coordonnées du milieu I de PQ. Montrer que I appartient à une courbe fixe. (Dijon.)

1089. On considère la fonction

$$y = \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{5}{2}.$$

1° Étudier les variations de cette fonction. Tracer la courbe C représentative de ces variations. Construire avec précision les tangentes à cette courbe aux points d'intersection avec les axes de coordonnées.

2° On considère, sur la courbe C, le point P d'abscisse $x_1 = m$ et le point P′ d'abscisse $x_2 = m + 2$. Exprimer en fonction de m les coordonnées du point M, milieu de PP′. Montrer que ces coordonnées vérifient une relation indépendante de m. En déduire que le lieu du point M est une courbe C′ égale à la courbe C. Calculer en fonction de m la pente de la tangente en M à la courbe C′. En déduire que cette tangente se confond avec la droite PP′.

3° Calculer, en fonction de m, la pente de la tangente en P à la courbe C. Écrire l'équation de cette tangente et en déduire l'équation de la tangente à la courbe C en P′ en fonction de m. Calculer les coordonnées du point d'intersection S de ces deux tangentes en P et P′ à la courbe C en fonction de m. Les comparer à celles du point M et en déduire le lieu du point S ainsi que son équation. Quel est le lieu du milieu de MS ? (Caen.)

1090. On désigne par (C) les courbes représentatives de la fonction

$$y = mx^2 + 2(2m - 1)x + 4m,$$

dans laquelle m est un nombre algébrique quelconque.

1° Tracer les courbes (C_1) et (C_2) correspondant respectivement aux cas où $m = \frac{1}{2}$ et $m = -1$. Calculer les coordonnées des points d'intersection de (C_1) et (C_2).

2° Calculer, en fonction de m, les coordonnées du sommet des courbes (C) et en déduire sur quelle ligne se déplace ce sommet lorsque m varie. Tous les points de cette ligne peuvent-ils être des sommets de courbes (C) ?

3° Démontrer que les courbes (C) passent par un point fixe A dont on déterminera les coordonnées. Quelle particularité présentent les courbes en ce point ?

4° Détermider l'équation de la tangente aux courbes (C) au point A. (Rome.)

1091. Ox et Oy désignant deux axes de coordonnées rectangulaires, on considère la courbe (C_m) représentative des variations de la fonction $y = x^2 + mx + 1$, m désignant un paramètre variable.

1° Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe A. Déterminer m pour que la courbe (C_m) passe par un point donné B, du plan, de coordonnées α, β ; discuter suivant la position du point B dans le plan.

2° Montrer qu'il existe deux courbes (C_m) particulières qui sont tangentes à Ox ; soient K_1 et K_2 leurs points de contact avec Ox.

Pour quelles valeurs de m la courbe (C_m) coupe-t-elle Ox en deux points distincts ? Prouver qu'alors ces deux points d'intersection M′, M″ avec Ox sont conjugués harmoniques par rapport à K_1 et K_2.

3° On considère une droite fixe (D), d'équation

$$y = ax + 1 - b,$$

où l'on suppose $b > 0$. En se bornant à considérer les valeurs de m pour lesquelles (C_m) coupe (D) en deux points P′ et P″, on désigne par p' et p'' les projections sur Ox de ces points P′ et P″. Montrer que, quand m varie, p' et p'' restent conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes k_1, k_2 de Ox. En résulte-t-il une propriété analogue pour P′ et P″ ?

4° On coupe une courbe (C_m) donnée par une droite variable (D) passant par O ; soient P′ et P″ les points d'intersection de (D) avec (C_m), et Q le conjugué harmonique sur (D) de O par rapport à P′ et P″. Montrer que, lorsque (D) tourne autour de O [la courbe (C_m) restant fixe] le point Q reste sur une droite (Δ_m) [qui dépend de la courbe (C_m) choisie.

Prouver que, quand m varie, la droite (Δ_m) passe par un point fixe. (Nancy.)

1092. On considère la fonction $y = x^2 - 3x - 4$.

1° Construire la courbe représentative (C).

2° Étant donné un point M de la courbe (C) d'abscisse x_0, calculer les coefficients angulaires de la tangente à la courbe en M et de la normale en M (perpendiculaire à la tangente) ; écrire l'équation de la tangente (T) et de la normale (N)

3° Soient m la projection de M sur la droite $x = \frac{3}{2}$, T le point d'intersection de la tangente (T) et N celui de la normale (N) avec la même droite $x = \frac{3}{2}$.

Montrer :

a) que mN = constante ;

b) que Tm a un milieu fixe. Quel est ce point ?

4° En utilisant les résultats du 3°, construire :

a) par un point de la droite $x = \frac{3}{2}$ les tangentes à la courbe C. Discussion ;

b) par un point de la droite $x = \frac{3}{2}$ les normales à la courbe C. Discussion.

(On remarquera que parmi celles-ci existe toujours la droite $x = \frac{3}{2}$). (Caen.)

1093. 1° Étudier la variation de chacune des fonctions

$$y_1 = x^2 - 2x + 7 \text{ et } y_2 = x^2 - x + 5$$

lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Construire les courbes C_1 et C_2 représentatives de ces fonctions. Déterminer les coordonnées du point A commun aux deux courbes.

2° Écrire l'équation de la tangente en A à C_2 ; la construire sur le graphique ; déterminer les intersections de cette tangente avec C_1.

3° Sachant qu'une tangente est une droite qui coupe une courbe en deux points confondus, trouver l'équation d'une droite tangente commune à C_1 et C_2.

4° On considère les fonctions

$$(1 + m)y = (1 + m)x^2 - (2 + m)x + 7 + 5m$$

où m est un paramètre arbitraire. Ces courbes ont-elles un point commun? Appelant sommet d'une des courbes représentatives le point où la tangente est parallèle à Ox, on demande de trouver et de construire le lieu des sommets de ces courbes lorsque m varie. (Grenoble.)

1094. 1° Construire sur le même graphique les courbes C_1 et C_2 représentant les fonctions

$$(C_1) \quad f(x) = -x^2 + 1,$$
$$(C_2) \quad g(x) = x^2 - 2x - 3.$$

Déterminer les coordonnées des deux points d'intersection A et B de C_1 et de C_2. (On appellera A le point situé sur l'axe Ox.)

2° Montrer que, quel que soit m, les points A et B sont sur la courbe C représentant les variations de la fonction [1]

$$\varphi(x) = \frac{x^2(m-1) - 2mx - 3m + 1}{m+1}.$$

3° La courbe C coupe l'axe horizontal en un point fixe A et en un point variable M. Calculer l'abscisse de M. Quelle est la forme des courbes C suivant les valeurs de m ? Pour quelle valeur de m la courbe C est-elle tangente à l'axe horizontal ?

4° Étudier la variation de l'abscisse de M quand m varie. Courbe représentative.

5° Déterminer m pour que la surface du triangle ABM soit égale à 3.

1095. La courbe C représentative des variations du trinôme

$$y = ax^2 + bx + c$$

est tangente à la droite d'équation $y = 2x - 1$ au point P d'abscisse $x = +2$.

1° Montrer qu'on peut mettre le trinôme sous la forme

$$y = a(x-2)^2 + 2x - 1.$$

2° Pour quelles valeurs de a la courbe C rencontre-t-elle l'axe Ox en deux points distincts A et B ? Étudier, suivant les valeurs de a, le signe des abscisses de ces points.

3° Montrer qu'il existe une relation indépendante de a entre les abscisses des points A et B et que ces points sont conjugués harmoniques par rapport aux points D et H de Ox d'abscisses -1 et $+2$.

4° Déterminer a pour que le triangle APB soit rectangle en P.

5° Donner l'expression de la pente m de la tangente à la courbe (C) en un point M d'abscisse x_0.

m étant donné, montrer qu'il existe une relation indépendante de a entre les coordonnées de M, et que, lorsque a varie, M décrit une droite qui passe par P quelle que soit la valeur donnée à m.

(Nancy.)

1096. 1° Calculer la dérivée de la fonction $y = x^2 + px + q$ pour $x = 0$.

2° On considère les deux fonctions

$$y = x^2 + 3x + 1 \quad \text{et} \quad y = x^2 + px + q$$

dont les graphiques représentatifs par rapport à deux axes perpendiculaires Ox et Oy sont respectivement les deux courbes (Γ) et (Γ').

Calculer p et q pour que ces deux courbes se coupent en un point A situé sur Oy et qu'en ce point la tangente à la courbe (Γ') ait pour coefficient angulaire -2.

Dans toute cette seconde partie, p *et* q *conserveront ces valeurs.*

Construire alors sur un même graphique les courbes (Γ) et (Γ').

Établir les équations [1] des droites tangentes à (Γ) et à (Γ') au point A. Ces droites coupent l'axe Ox en B et C. Calculer les abscisses de ces deux points. Calculer tg α, α étant l'angle *aigu* formé par les deux droites tangentes.

3° On suppose maintenant p variable, q gardant toujours la même valeur que précédemment. Calculer en fonction de p le volume engendré par le triangle ABC tournant autour de Ox. (Plusieurs cas de figure suivant la position de C par rapport à O et B.)

1097. On considère la fonction $y = \dfrac{x-1}{2x-3}$.

1° Étudier les variations de cette fonction. Courbe représentative (C).

2° Étudier l'intersection de cette conrbe avec la droite (D) $y = -2x + h$.

3° Lorsque la courbe (C) et la droite (D) ont deux points communs P et Q, montrer que le milieu I de PQ est le même que le milieu de AB, A et B étant les points d'intersection de la droite (D) et des asymptotes de la courbe (C). Quel est le lieu de ce point I ?

4° Montrer que le lieu du point I passe par le centre de symétrie de la courbe.

Que peut-on dire des quatre droites suivantes : les asymptotes de la courbe (C), le lieu du point I et celle des droites (D) qui passe par le centre de la courbe ?

(Lyon.)

1098. 1° Étudier les variations de la fonction $y = \dfrac{2x}{x-3}$ et tracer la courbe représentative (C).

2° Soient A et B deux points de cette courbe tels que les droites OA et OB aient pour pentes respectives α et β. Calculer les coordonnées des points A et B et former l'équation du premier degré en x et y qui représente la droite AB.

3° Quelle relation existe-t-il entre α et β lorsque l'angle AOB est droit ?

Montrer que, si un angle droit AOB pivote autour du point O, la droite AB qui joint les points où ses côtés coupent la courbe (C) se déplace parallèlement à elle-même ?

(Toulouse.)

1099. 1° Déterminer les coefficients de la fonction homographique

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

pour que la courbe (P) représentative de ses variations passe par les points : A situé sur Ox d'abscisse -1 ; B situé sur Oy d'ordonnée -1 ; C de coordonnées $x = 2$, $y = 3$.

Construire la courbe P. Montrer qu'elle a un centre de symétrie.

2° Par l'origine O des coordonnées, on mène la droite D d'équation $y = mx$; déterminer selon les valeurs de m le nombre des points communs à la droite D et à la courbe (P) ; M étant un point de (P), est-il possible que la droite OM ne rencontre (P) qu'au point M ? Déterminer les coordonnées des points M qui satisfont à cette propriété. En donner une interprétation géométrique.

3° On désigne par M′ et M″ les points d'intersection de la droite D et de la courbe (P), par X et Y les coordonnées du milieu S de M′ M″. Montrer qu'il existe une relation entre X et Y indépendante de m. En déduire l'équation et la construction du lieu géométrique (Q) du point S lorsque la sécante D prend toutes les positions possibles. Quels sont les points d'intersection des courbes (P) et (Q) ?

(Poitiers.)

1100. 1° Étudier la variation des fonctions

$$y = \frac{x-2}{2x-1}, \quad Y = \frac{x+\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}x-1}$$

et les représenter sur le même graphique (en se bornant aux valeurs coordonnées comprises entre — 6 et + 4). Déterminer les points d'intersection des deux courbes.

2° Déterminer la fonction homographique

$$y = \frac{ax+b}{cx+d},$$

qui prend les valeurs numériques

$$y = +1, \quad -1, 0,$$

pour les valeurs respectives

$$x = -1, \quad +1, k.$$

Montrer que, quel que soit k, la courbe représentative passe par deux points fixes A et B. Déterminer les asymptotes de cette courbe.

3° Distinguer les valeurs de k pour lesquelles A et B sont sur une même branche de celles pour lesquelles ils sont sur des branches différentes. Étudier le sens de variation de la fonction suivant la valeur de k. — Vérifier que les courbes tracées à la première partie sont bien conformes à ces résultats.

4° Déterminer les points d'intersection de la courbe avec la droite $y = x$. Discuter suivant la valeur de k l'existence de ces points et leur position par rapport au point O. (Strasbourg.)

1101. On donne la fonction $y = \frac{mx+m-7}{5x-m+3}$, où m est un paramètre. On désigne par H la courbe représentative.

1° Tracer la courbe H pour $m = 0$.

2° Indiquer le sens des variations de y suivant les valeurs de m.

3° Trouver une relation indépendante de m entre les coordonnées du point de rencontre des asymptotes de H. En déduire le lieu de ce point et construire ce lieu.

4° Montrer que lorsque m varie la courbe H passe par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées. (Besançon.)

1102. 1° Trouver pour $x = 0$, la dérivée de la fonction

$$y = \frac{1}{x-1}.$$

2° On désigne par (H) la courbe représentative de la fonction $y = \frac{(m-1)x+m}{x-m}$, dans laquelle m désigne un nombre donné. Montrer que les courbes (H) qui correspondent à toutes les valeurs de m coupent l'axe $y'Oy$ en un même point A et qu'elles admettent toutes la même tangente en ce point.

3° Exprimer en fonction de m les coordonnées du point d'intersection I des asymptotes de la courbe (H). En déduire le lieu de I quand m varie.

4° Déterminer en fonction de m les coefficients a, b, c de manière que la courbe (P) représentative de la fonction

$$ax^2 + bx + c$$

soit tangente en A à la courbe (H) et admette pour axe de symétrie une des asymptotes de (H).

Les courbes (H) et (P) qui correspondent ainsi à une valeur de m se coupent en un point M distinct de A. Trouver le lieu décrit par ce point quand m varie arbitrairement. (Toulouse.)

1103. 1° Déterminer les coefficients b et c du trinôme $x^2 + bx + c$ de manière que ce trinôme passe par un minimum égal à (— 1) quand x prend la valeur (— 2).

2° Les coefficients b et c ayant les valeurs déterminées au § 1, construire avec précision les courbes

(C_1) $\qquad y_1 = x^2,$

(C_2) $\qquad y_2 = \frac{(2b-c)x+2c}{x+b-2},$

rapportées au même système d'axes rectangulaires. Déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.

3° Former l'équation donnant les abscisses des points d'intersection des deux courbes. Comparer l'équation obtenue avec l'équation

$$(x-2)(x^2+bx+c) = 0$$

où b et c sont les valeurs déterminées au § 1 et calculer les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.

On désigne par A et B ceux des points d'intersection dont l'abscisse est supérieure à (— 2). Déterminer l'angle de la droite AB avec l'axe des x.

4° On coupe la courbe (C_1) par une droite parallèle à AB. Lieu du milieu de la corde A_1B_1 interceptée.

Même question en remplaçant la courbe (C_1) par la courbe (C_2). (Lyon.)

1104. 1° Déterminer les coefficients a, b, c pour que la courbe (C) représentative de la fonction $y = ax^2 + bx + c$ passe par l'origine des axes, coupe l'axe des x en un second point d'abscisse 4 et passe par le point S (2, 1). Construire (C). Vérifier qu'un point M quelconque de cette courbe est à égale distance du point F (2, 0) et de la droite (D) d'équation $y = 2$.

2° Construire avec les mêmes axes la courbe (Γ) représentative de la fonction

$$y = \frac{2x}{2-x}.$$

3° Montrer que les deux courbes (C) et (Γ) sont tangentes en O et former l'équation de leur tangente commune. En dehors de O, ces deux courbes ont encore un point d'intersection ; calculer ses coordonnées. (Aix-Marseille.)

1105. On donne l'équation du second degré

$$x^2 - 3x + \frac{5}{4} - m = 0,$$

où m est un paramètre pouvant prendre toute valeur numérique positive ou négative.

1° Entre quelles limites doit varier m pour que cette équation ait deux racines comprises entre 0 et 2 ?

2° Soit (P) la courbe représentative des variations de la fonction $y = x^2 - 3x + \frac{5}{4}$. Tracer cette courbe dans un système d'axes rectan-

gulaires $x'Ox$, y_1Oy' et retrouver sur le graphique le résultat obtenu à la question précédente.

3° Construire sur le même graphique, la courbe (H) représentative de la fonction

$$y = \frac{3(3x+5)}{4(x+3)}.$$

Former l'équation donnant les abscisses des points communs aux courbes (P) et (H). Montrer que l'un de ces points, soit A, est situé sur Oy.

4° Sachant que l'angle de deux courbes, en un point qui leur est commun, est égal à l'angle de leurs tangentes en ce point, montrer que les courbes (P) et (H) se coupent en A sous un angle droit.

5° Les tangentes en A aux courbes (P) et (H) rencontrent l'axe $x'Ox$ respectivement en M et N. Évaluer la longueur du segment MN.

(Caen.)

1106. On considère les deux fonctions $y = \frac{x-m}{p-x}$, $y = ax^2 + bx$, dans lesquelles x est la variable, m, p, a, b des constantes.

1° Dire pour quelles valeurs de x la fonction $y = \frac{x-m}{p-x}$ est positive et pour quelles valeurs elle est négative.

2° Déterminer m, p, a, b pour que les courbes représentatives des deux fonctions passent par les points $A(x = 1, y = -2)$ et $B(x = 3, y = -4)$.

3° m, p, a, b ayant les valeurs ainsi déterminées, étudier les variations des deux fonctions et construire leurs courbes représentatives dans les mêmes axes.

4° Les courbes se recoupent en un troisième point, C, dont on calculera les coordonnées : pour cela, on formera l'équation donnant les abscisses des points communs et, sans développer, on mettra en évidence une des racines connues. Vérifier les résultats sur le graphique et construire les tangentes aux deux courbes au point C. (La Réunion.)

1107. 1° Étudier la fonction $y = \frac{ax}{3x-a}$, x étant la variable et a un paramètre. Sens des variations. Asymptotes. Quel est le lieu, lorsque a varie, du point de rencontre des asymptotes ? Montrer que, quel que soit a, la courbe passe par un point fixe et y a une tangente fixe. Tracer la courbe en prenant $a = 3$.

2° On considère un angle $XAY = 60°$ et, sur la bissectrice intérieure AZ de cet angle, le point O défini par $AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Une droite variable passant par O coupe AX en M et AY en N ; on pose $AM = x$, $AN = y$. Exprimer en fonction de x, y, a les aires des triangles AOM, AON, AMN ; en déduire la relation

(1) $$a(x + y) = 3xy.$$

La relation (1) définit une fonction y de la variable x dont on indiquera la variation.

3° On considère un tétraèdre régulier ABCD dont les arêtes ont pour longueur a. O étant la projection orthogonale de D sur le plan de la face ABC on fait passer par DO un plan qui coupe AB en M et AC en N. On pose $AM = x$, $AN = y$. Montrer que x et y vérifient la relation (1). Déterminer x et y de façon que la somme des surfaces des trois triangles DAM, DAN, AMN soit égale au produit par un nombre donné k de la surface totale du tétraèdre (la discussion n'est pas demandée). Terminer le calcul pour $k = \frac{4}{9}$ et pour $k = \frac{1}{2}$. (Besançon.)

1108. On donne la fonction $\frac{2mx-1}{mx-1}$ et l'on appelle C_m la courbe représentant les variations de cette fonction (m est un paramètre variable que l'on supposera différent de zéro pour les 2° et 3°).

1° Que peut-on dire des courbes C_m (croissance, asymptotes, point intéressant) ?

2° Étudier les variations de la fonction lorsque $m = \frac{1}{2}$ et construire la courbe représentative correspondante $C_{1/2}$.

Mêmes questions pour $m = -\frac{1}{2}$.

Trouver une transformation simple permettant de passer de $C_{1/2}$ à $C_{-1/2}$. Plus généralement les courbes C_m et C_{-m} jouissent-elles de cette propriété ?

3° Soit (D) la droite qui a pour équation $y = ax + b$ (on suppose $a \neq 0$). Former l'équation du deuxième degré qui a pour racines les abscisses des points de rencontre A et B de (D) et C_m.

Quelle inégalité doivent vérifier a, b et m pour que (D) et C_m se coupent ?

Appelant alors P et Q les points d'intersection de (D) et des asymptotes de C_m, calculer les abscisses i et j des milieux I et J de AB et PQ respectivement.

En déduire une propriété remarquable des segments AP et BQ.

(Grenoble.)

1109. On considère la fonction

$$f(x) = y = \frac{4-x}{2x-4}.$$

1° Trouver par une étude directe, les valeurs de x pour lesquelles y reste compris entre -1 et $+1$.

2° Tracer la courbe de variation de la fonction $f(x)$ et vérifier sur le graphique les résultats de l'étude précédente.

3° Vérifier que le produit des valeurs que prend $f(x)$ pour deux valeurs quelconques de x ayant pour somme 6 est constante.

Plus généralement, montrer que si

$$F(x) = \frac{ax+b}{a'x+b'},$$

a et a' étant tous deux différents de 0, ainsi que $a'b - ab'$, il existe un nombre x_0 tel que le produit $F(x_0 + h)\,F(x_0 - h)$ admet une valeur P indépendante de h. (Toulouse.)

1110. 1° On considère la fonction

(1) $$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

(a, b, c, d : constantes données telles que $ad - bc \neq 0$). Étant données quatre valeurs x_1, x_2, x_3, x_4 de la variable, deux à deux distinctes et pour lesquelles la fonction (1) est définie, on désigne par y_1, y_2, y_3, y_4 les valeurs correspondantes de y. Démontrer que l'on a

(2) $$\frac{y_1-y_3}{y_1-y_4} : \frac{y_2-y_3}{y_2-y_4} = \frac{x_1-x_3}{x_1-x_4} : \frac{x_2-x_3}{x_2-x_4}.$$

(on pourra calculer d'abord les différences $y_1 - y_2,...$ en fonction de $x_1 - x_2,...$).

2° Soient P_1, P_2, P_3, P_4 les points de Ox dont les abscisses sont x_1, x_2, x_3, x_4 et Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 les points de Oy dont les ordonnées sont y_1, y_2, y_3, y_4 ; démontrer, en utilisant la relation (2), que si la division $P_1,... P_4$ est harmonique, il en est de même de la division $Q_2,..., Q_4$ (on montrera que dans ce cas les deux membres de (2) sont égaux à -1).

3° On désigne par m un paramètre non nul, et l'on considère, dans le plan rapporté à deux axes rectangulaires, les droites

(3) $$y = \frac{2}{m} - \frac{x}{m^2}.$$

Combien passe-t-il de droites de la famille (3) par un point donné du plan ? En particulier, trouver le lieu des points du plan par lesquels passe *une seule* droite de la famille.

Ce lieu comprend notamment une courbe (C) dont on déterminera l'équation. Montrer que la droite (3) qui passe par un point de (C) est tangente à (C) en ce point.

4° Soient P et Q les points où une droite (3) coupe les axes Ox et Oy. Trouver entre les coordonnées de P et Q une relation indépendante de m. Si quatre droites de la famille (3) coupent Ox en des points formant une division harmonique, que peut-on dire des points correspondants de Oy ? (Nancy.)

1111. 1° Résoudre l'inégalité $\frac{3-x}{2x-1} < \frac{1}{2}(5x-1)$

2° Étudier la variation de la fonction $y = \frac{3-x}{2x-1} = f(x)$ et tracer sa courbe représentative en prenant comme unité 2 cm.

3° Retrouver les résultats du 1° en utilisant le tracé du 2°.

4° Montrer qu'il existe une valeur a de x et une seule, telle que la somme $f(a+h) + f(a-h)$ soit indépendante de h. Déterminer a. A quelle propriété géométrique de la courbe représentative ce résultat correspond-il ?

Montrer qu'il existe une valeur b et une seule de x, telle que le produit $f(b-h)$. $f(b+h)$ soit indépendant de h. Déterminer cette valeur. (Clermont.)

1112. 1° Le plan étant rapporté à deux axes rectangulaires $x'Ox$ et $y'Oy$, construire la courbe (H) représentant les variations de la fonction

$$y = \frac{2(x-1)}{x-2}.$$

(Aucune explication n'est demandée. Il sera tenu compte de la précision et de la présentation du graphique.)

2° On coupe la courbe (H) par une droite (D) variable, $y = x \operatorname{tg} \varphi$.

Exprimer en fonction de $t = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ les coordonnées des points M et N d'intersection.

Expliquer pourquoi les coordonnées de l'n de ces points se déduisent de celles de l'autre lorsqu'on change t en $-\frac{1}{t}$.

3° Montrer que les tangentes en M et N à la courbe (H) ont pour équations

$$2x + (1+t)^2 y = 2(1+t^2)$$

et $$2t^2 x + (1-t)^2 y = 2(1+t^2).$$

Montrer que les coordonnées X et Y du point d'intersection S de ces tangentes satisfont aux relations

$$X + Y = 2 \quad \text{et} \quad X + Y \operatorname{tg} \varphi = 0.$$

En déduire le lieu du point S lorsque φ varie et l'angle de OS avec la droite (D). (Liban.)

1113. On donne l'inéquation $3 + \frac{1}{1-x} > \frac{1}{2x+1}$.

1° Chercher les valeurs de x vérifiant cette inéquation.

2° Représenter avec soin, avec les mêmes axes de coordonnées, les courbes $y_1 = 3 + \frac{1}{1-x}$ et $y_2 = \frac{1}{2x+1}$ et retrouver les résultats précédents.

3° Sur la base de la méthode graphique de la seconde question, résoudre de même l'inéquation

$$3 + \frac{1}{1-x} > \frac{3}{4}x^2 - 4x + 4.$$

(Athènes.)

1114. On considère l'équation du second degré

(1) $$u^2 - 2(x+1)u + y + 4x + 4 = 0$$

dans laquelle u est l'inconnue, x et y des nombres algébriques donnés.

1° Déterminer la relation qui doit exister entre x et y pour que cette équation admette une racine double.

2° Cette relation peut être mise sous la forme $y = f(x)$. Construire la courbe (C) qui représente les variations de cette fonction. On prendra le centimètre comme unité de longueur sur les axes de coordonnées. Équation des tangentes à (C) aux points où cette courbe coupe Ox.

3° On considère le point M de coordonnées x et y. Quelle doit être sa position dans le plan de coordonnées déterminé au 2° pour que l'équation proposée ait deux racines distinctes ?

4° Déterminer la relation qui doit exister entre x et y pour que la somme des racines de l'équation (1) soit nulle. Construire la courbe (D_1) qui représente les variations de la fonction indiquée par cette relation sur le graphique du 2°.

5° Déterminer la relation qui doit exister entre x et y pour que le produit des racines de l'équation (1) soit nul. Construire la courbe (D_2) qui représente les variations de la fonction indiquée par cette relation sur le graphique du 2°.

6° En utilisant les résultats précédents indiquer quel est le signe des racines de l'équation (1) pour chaque région du plan déterminée par l'intersection des courbes (C), (D_1), (D_2). (Rome.)

II. Applications géométriques.

1115. On donne un triangle ABC rectangle en A, moitié du triangle équilatéral BCB' ; on connaît l'hypoténuse BC = l.

1° Calculer en fonction de l, les deux côtés AB et AC.

2° Déterminer un point M situé sur BC ou aux extrémités du segment BC, tel que MP étant la perpendiculaire abaissée de M sur AC, la somme des carrés des quatre côtés du trapèze BMPA soit égale au carré d'une longueur donnée m ? Discuter en faisant varier m. On posera CM = x.

3° Donner une solution géométrique de la 2° question ; retrouver en discutant cette solution géométrique tous les résultats de la discussion algébrique. (Montpellier.)

1116. Dans un plan P, on donne un triangle isocèle OAB de côtés $OA = OB = a$, $AB = b$. Sur les perpendiculaires en A et en B à P et d'un même côté de P, on porte les longueurs $AM = x$ et $BN = y$.

1° Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que l'angle MON soit droit est $2xy = b^2 - 2a^2$.

a étant donné, entre quelles limites faut-il choisir b pour que cette conditon puisse être remplie ?

Dans toute la suite du problème, on suppose que l'angle MON est droit et que $b = a\sqrt{3}$.

2° Déterminer x et y de manière que $x + y$ ait une valeur donnée λ. Discuter.

3° Montrer que l'aire S du triangle MON vérifie la relation $16S^2 = 4a^2\lambda^2 + a^4$.

4° On suppose $x = a$. Calculer le cosinus du rectiligne du dièdre formé par le plan P et par le plan MON. Donner une valeur approchée de ce rectiligne. (Rennes.)

1117. Un prisme dont les arêtes sont indéfinies dans les deux sens admet comme section droite un triangle équilatéral ABC dont les côtés ont une longueur donnée a.

On porte sur les arêtes issues de A et de B et dans des sens opposés les longueurs $AA' = x$ et $BB' = y$ et l'on désigne par M le point de rencontre des droites AB et A'B'.

Lorsque les longueurs x et y sont égales, les deux tétraèdres AA'CM et BB'CM ont le même volume. Ces deux tétraèdres sont-ils superposables?

2° Calculer, pour x et y quelconques, les carrés des longueurs des côtés du triangle A'B'C.

Trouver la relation qui doit lier x et y pour que ce triangle soit rectangle en C ; indiquer pour $x = y$, une détermination géométrique des points M, A' B'.

3° Calculer, pour x et y quelconques, les volumes des deux tétraèdres AA'CM et BB'CM.

Former les relations auxquelles doivent satisfaire x et y pour que le triangle CA'B' soit rectangle en C et pour que la somme des volumes des deux tétraèdres ait une valeur donné S.

En déduire l'équation à laquelle doit satisfaire la somme $(x + y)$ et les moyens de calculer x et y. Discuter le problème et indiquer la solution pour laquelle S est minimum. (Nancy.)

1118. On donne un triangle isocèle AOB rectangle en O, $OA = OB = 2a$. Soit C le milieu de AB. On prend sur OA, entre O et A, un point M défini par $OM = x$.

1° Calculer en fonction de x et de a le volume V engendré par le triangle MBC en tournant autour de OB.

2° Étudier la variation de V quand M décrit le segment OA. La représenter par une courbe.

3° Utiliser le graphique de la deuxième partie pour discuter le problème suivant : déterminer x de telle sorte que le volume V précédent ait une valeur donnée πh^3.

4° Calculer en fonction de x et de a la tangente de l'angle MBA. En déduire la valeur des segments formés sur OA par la bissectrice de l'angle OBA. (Aix-Marseille.)

1119. La figure représente un demi-cercle de centre O, de diamètre $AB = 2R$, un point M sur la demi-circonférence, P la projection de M sur AB, MQ la tangente en M au cercle, arrêtée en Q sur le diamètre AB prolongé.

On pose $OP = x$ et l'on suppose $x > 0$.

1° Exprimer en fonction de x les volumes $\mathcal{A}$ engendré par le triangle AMQ et $\mathcal{B}$ engendré par le triangle BMQ dans la rotation autour de AB.

2° Représenter graphiquement la fonction $y = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$ de x, pour x quelconque, et délimiter l'arc utile.

3° Représenter la fonction OQ de x et déterminer la position de M pour laquelle $OQ = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}R$. (On pourra prendre $R = 1$.)

Évaluer, pour cette position particulière, la longueur AP ; du résultat, déduire une construction simple de P.

4° Pour cette position particulière, soit θ l'angle (OB, OM). Calculer $\cos\frac{\theta}{2}$.

1120. 1° Soit xOy un angle de 60°. Sur le côté Oy on prend P et B tels que $OP = a$, $OB = 2a$.

Construire géométriquement le point M sur Ox tel que $\overline{MB}^2 + \overline{MP}^2 = l^2$. Discuter.

2° Soit M un point variable sur Ox. On pose $OM = x$. Étudier la variation de $\overline{MB}^2 + \overline{MP}^2$ lorsque M parcourt la demi-droite Ox.

Déterminer x de telle manière que $\overline{MB}^2 + \overline{MP}^2 = l^2$. Discuter. (Lyon.)

1121. On considère deux axes Ox, Oy rectangulaires, deux points A et B respectivement sur Ox et Oy tels que

$$\overline{OA} = \overline{OB} = R,$$

R étant une longueur donnée. On trace le quart de cercle AB de centre O et de rayon R. Une circonférence de centre M et de rayon y est tangente intérieurement en K au quart de cercle O. Elle est de plus tangente en H à Ox.

On pose $\overline{OH} = x$.

1° Trouver la relation qui lie x et y.

2° Étudier les variations de y en donnant à x toutes les valeurs positives et négatives.

La courbe représentative (P) ainsi obtenue comprend le lieu de M. La construire ; montrer que (P) passe par le point A. Coefficient angulaire de la tangente en ce point ?

3° La tangente en K au cercle O rencontre la droite HM en N et l'axe Ox en T. Comparer les deux triangles HNT et OKT. Lieu du point N quand M varie. En déduire la construction du point M quand H est donné.

4° Déterminer M de manière que $OH + 3HM = \frac{3R}{2}$.

(Alger.)

1122. On considère un angle droit xOy et la droite $z'Oz$ perpendiculaire en O à son plan. On porte sur les demi-droites Ox, Oy, Oz, Oz' les points A, B, C, D respectivement, tels que $OA = OB = OC = OD = a$. Par le point A, on mène la demi-droite Au parallèle à Oy et de même sens que Oy. Soit M un point de Au.

1° Montrer que le volume du tétraèdre DBMC reste constant lorsque M décrit Au. Quel est ce volume ?

2° Construire la hauteur, issue de B, de ce tétraèdre. Montrer que son pied H est sur OM. Calculer cette hauteur BH en fonction de a et de l'angle x des plans CMD et xOz.

3° Calculer MC en fonction de a et de x.

Déterminer x de façon que $MC = ak$, k étant un nombre positif donné. Discussion.

Calculer x en radians dans les cas particuliers où $k = \sqrt{2}$, $k = \sqrt{3}$, $k = \sqrt{5}$.

4° On prend pour plan de comparaison le plan parallèle à xOy mené par D. Faire, en géométrie cotée, l'épure de la figure lorsque $a = 5$ cm et $x = 30°$. Figurer, en particulier, le tétraèdre DBMC et sa hauteur BH.

5° Vérifier, sur cette épure de géométrie cotée, au moins approximativement, les valeurs trouvées par le calcul pour les longueurs BH et MC (cas : $a = 5$ cm, $x = 30°$). (Aix-Marseille.)

1123. On donne un quart de cercle de rayon R limité aux rayons OA et OB. D'un point M de l'arc AB on mène les perpendiculaires MP sur OA et MQ sur OB.

1° Déterminer M de sorte que l'on ait $MP + 2MQ = l$, l étant une longueur donnée.

a) Prendre pour inconnue $OP = x$. Discuter.

b) Donner une solution géométrique du problème et retrouver les résultats de la question précédente.

2° Déterminer M de sorte que le rapport de l'aire de la calotte sphérique engendrée par l'arc MA tournant autour de OA à celle de la calotte engendrée par MB tournant autour de OB soit égal à un nombre positif donné m.

a) Prendre pour inconnue $AOM = \theta$ et comme inconnue auxiliaire $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = t$. Discuter.

b) Donner une solution géométrique du problème et retrouver les résultats précédents. (Bordeaux.)

1124. On donne un carré dont les côtés sont

$$AB = BC = CD = DA = 1.$$

Un point M varie sur le côté BC, entre B et C ; il est défini par $BM = x$. On appelle S l'aire du triangle ABM et S' l'aire du trapèze AMCD.

1° Variation du rapport $\frac{S}{S'}$. Courbe représentative. Coefficient angulaire de la tangente à cette courbe au point d'abscisse $x = 0$ et au point d'abscisse $x = 1$.

2° Déterminer M de manière que $AM = 5CM$. Interpréter chacune des racines de l'équation du problème.

3° On suppose maintenant $x = \frac{3}{4}$. Calculer le sinus, le cosinus et la tangente de chacun des angles BAM et CAM. Calculer l'aire latérale et le volume du tronc de cône de révolution engendré par le trapèze AMCD en tournant autour de CD. (Rennes.)

1125. On considère un triangle AOB rectangle en O. On prolonge AO d'une longueur $OC = OB$ et l'on trace le quart de cercle de centre O, de rayon OB, extérieur au triangle. On désigne par M un point appartenant soit au segment AB, soit au quart de cercle BC, par H la projection de M sur AC. On donne $OA = 2a$, $OB = a$, a étant une longueur donnée, et l'on pose $AH = x$.

1° Évaluer, en fonction de a et x,

$$\overline{HM}^2 \text{ et } y = \overline{MA}^2 + \overline{MC}^2.$$

Variations de y quand H décrit le segment AC. Courbe représentative.

Déterminer M de manière que $\overline{MA}^2 + \overline{MC}^2 = k^2$, k étant une longueur donnée. Discuter. Solution géométrique.

2° On désigne par V le milieu de OA ; évaluer en fonction de a et x la tangente de l'angle MVB quand H décrit le segment AC. Variations et courbe représentative de $z = \operatorname{tg}$ MVB dans le seul cas où H décrit le segment AO. Vérification géométrique.

3° On fait tourner la figure autour de AC. La portion comprise entre A et M de la ligne formée par le segment AB et le quart de cercle BC engendre une surface. Évaluer la mesure de cette surface en fonction de x suivant la position de H sur AC. (Alger.)

1126. Soit un cône de révolution C de base circulaire de rayon R de hauteur h, limité au sommet et à la base. Deux cônes de révolution variables C_1 et C_2 ont pour base deux cercles dans le plan de base de C. Ces deux cercles tangents extérieurement entre eux sont tangents à la base de C en deux points diamétralement opposés de cette base ; les sommets des deux cônes C_1 et C_2 sont sur la surface latérale de C. On désigne par x le rayon de base de C_1.

1° Démontrer que la somme des apothèmes des deux cônes C_1 et C_2 est constante ; il en est de même pour la somme des hauteurs.

2° Évaluer en fonction de x le volume du solide S intérieur au cône C et extérieur aux cônes C_1 et C_2. Étudier la variation de ce volume. Quelle serait la base d'un cylindre circulaire équivalent à S de hauteur h ? La comparer aux bases de C_1 et C_2.

3° On suppose $h = R$ et $x = R/4$. On coupe S par des plans parallèles à la base du cône et situés à la distance z du sommet de C. Indiquer les différentes formes de la section suivant les valeurs de z, et calculer l'aire de la section et en étudier la variation quand z varie de 0 à R. (Alexandrie.)

1127. On donne une demi-circonférence de diamètre $AB = 2R$ de centre O. Sur le rayon normal à AB on porte $OC = 2R$ et l'on joint C à A et B. En faisant tourner la figure autour de OC on obtient un hémisphère et un cône de révolution.

Soit maintenant un point M sur OC tel que

$$OM = x < R.$$

Le plan perpendiculaire à OC en M coupe l'hémisphère et le cône suivant deux circonférences.

1° Calculer l'aire de la couronne comprise entre ces deux circonférences.

2° Étudier comment varie S quand x croît de 0 à R. Représenter graphiquement ces variations.

3° Déterminer les valeurs de x pour lesquelles S prend une valeur donnée $m\pi R^2$. Reconnaître pour quelles valeurs de m le problème admet 0, 1, 2 ou 3 solutions. (Bordeaux.)

1128 Une pyramide SABCD a pour base un carré dont la diagonale a pour longueur $2a$. L'arête SA de longueur h est perpendiculaire au plan de base.

On trace dans le plan de base une droite MN parallèle à la diagonale BD, qui rencontre le périmètre de cette base en deux points M et N et par MN on mène un plan perpendiculaire au plan de base. Lorsque la distance $AI = x$ de la parallèle MN au sommet A est comprise entre 0 et a, ce plan coupe la pyramide suivant un pentagone ; si la distance x est comprise entre a et $2a$, la section se réduit à un triangle.

Évaluer dans les deux cas l'aire de la section et étudier sa variation quand I décrit la diagonale AC.

On construira les courbes correspondantes en supposant $a = 1$, $h = 2$ par rapport aux mêmes axes rectangulaires. (Saïgon.)

1129. On considère un cône et un cylindre, de révolution tous les deux, de même hauteur h. Le cercle de base du cône, de rayon x, et l'un des cercles de base du cylindre, de rayon a, sont dans un même plan et concentriques. De plus ces deux corps sont du même côté de ce plan de base commun.

1° Déterminer, dans les différents cas de figure possibles, le volume de la portion du cône qui est comprise à l'intérieur du cylindre.

2° Étudier et représenter graphiquement les variations de ce volume lorsque, a et h restant fixes, x varie depuis 0 jusqu'à des valeurs positives très grandes.

3° Déterminer x de telle façon que ce volume soit dans un rapport donné m avec le volume total du cylindre. Calculer effectivement les valeurs du rapport $\frac{x}{a}$ dans les deux cas suivants : $m = \frac{1}{4}$, $m = \frac{3}{4}$. (Strasbourg.)

1130. Soit un triangle équilatéral ABC de côté donné a. Par le point P symétrique de C par rapport à B, on mène une droite qui rencontre AB en M entre A et B, et AC en N entre A et C.

On pose $BM = x$ et $CN = y$. Par le point B on mène la parallèle à AC qui rencontre en Q la droite PMN.

1° Évaluer BQ en fonction de y.

De la similitude des triangles BMQ et AMN, déduire la relation suivante :

$$xy + ay - 2ax = 0.$$

2° On pose $\frac{x}{y} = m$, où m est un nombre positif donné. Calculer x et y en fonction de a et de m.

De l'expression de x déduire entre quelles limites varie m quand x varie de 0 à a.

3° m étant donné, évaluer le rapport $\frac{BM}{BQ}$ et montrer que la considération du triangle BMQ permet de déterminer la direction du côté MQ. Construire graphiquement la position de la sécante PMN pour $m = \frac{3}{4}$.

4° Supposant encore $m = \frac{3}{4}$, évaluer en fonction de a les volumes des solides engendrés par la rotation autour de BC des triangles PBM et PCN.

1131. 1° On donne l'équation du second degré

$$(1) \qquad (2m + 1)X^2 - m(2m + 1 + \sqrt{3})X + m^2\sqrt{3} = 0$$

où X est l'inconnue, m un nombre positif donné.

Montrer que cette équation a toujours des racines qui s'expriment rationnellement en fonction du paramètre m. En déduire que l'une des racines est une fonction homographique de l'autre.

2° On donne, dans le plan, un angle droit xOy, et à l'extérieur de cet angle, un point A tel que l'on ait $OA = 1$ et $\widehat{yOA} = \frac{\pi}{6}$.

Une droite D tourne autour de A en restant constamment sécante aux deux côtés de l'angle xOy. Soient M et N les points d'intersection de la droite D avec Ox et Oy ; on posera $OM = x$, $ON = y$.

a) Évaluer x et y en fonction de la tangente de l'angle $OAM = \theta$. On posera $\operatorname{tg} \theta = t$ et l'on étudiera les variations de x et y en fonction de t quand θ varie entre les limites permises.

b) Calculer y en fonction de x et tracer la courbe représentative. Indiquer un procédé graphique pour construire des points de cette courbe. Donner une signification géométrique des racines de l'équation (1).

c) Soient V_1 le volume engendré par le triangle OAM en tournant autour de Ox et V_2 le volume engendré par le triangle OAN en tournant autour de Oy. Déterminer x de façon que $\frac{V_1}{V_2} = k$, k étant un nombre positif donné. Quelle est la plus petite valeur que l'on puisse donner à k ? Déterminer θ pour $k = 3\sqrt{3}$. (Poitiers.)

III. Cinématique.

1132. Un mobile animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié se trouve à l'origine du temps, $t = 0$, à l'origine des espaces $x = 0$. Il a, à cet instant, une vitesse donnée v_0, et à l'instant, $t = \theta$, son abscisse égale à α.

1° Déterminer l'équation horaire du mouvement.

2° Étude complète du mouvement dans les cas particuliers suivants :

a) $v_0 = 1$, $\theta = 2$, $\alpha = 1$;

b) $v_0 = -1$; $\theta = 2$, $\alpha = 1$;

c) $v_0 = \frac{1}{2}$, $\theta = 2$, $\alpha = 1$.

3° Reproduire sur un même graphique les diagrammes des espaces dans les cas particuliers a, b, c.

Chercher les coordonnées des points d'intersection avec une droite $t = h$.

4° Soient A, B, C ces points. Écrire les équations des droites OA, OB, OC. En déduire les équations des tangentes à l'origine aux diagrammes. Quelle remarque peut-on faire ?

5° Les mobiles animés des mouvements (*a*) et (*b*) se rencontrent ultérieurement. A quelle époque, en quel point se produira cette rencontre ? Existe-t-il un mouvement uniforme qui permettrait d'arriver au même point, dans le même temps ? (Grenoble.)

1133. Sur un axe Ox on place à l'instant $t = 1$ *s* un mobile M animé d'un mouvement uniformément varié, l'abscisse de M (en centimètres) est exprimée en fonction du temps (en secondes) par

$$x = t^2 - 4t + 9.$$

1° Étudier ce mouvement. Diagramme (on suppose que ce mobile n'existe pas avant l'instant $t = 1$).

2° A l'instant $t = 0$ on lance, *à partir de O*, sur le même axe un mobile M', animé d'un mouvement uniforme de vitesse v.

Quel est le diagramme de ce mouvement ?

Comment faut-il choisir v pour que le second mobile atteigne le premier? Interpréter graphiquement cette question en traçant les deux diagrammes sur un même graphique.

3° On prend $v = \frac{9}{4}$. Quels sont les instants et les points des rencontres ? Quelle est la vitesse moyenne du premier mobile entre ces deux instants ?

4° Quelle est la vitesse du premier mobile *au milieu de l'intervalle de temps* des rencontres ? Interpréter le résultat sur le graphique. (Paris.)

1134. Deux mobiles M et M' décrivent un axe $x'Ox$ d'un mouvement dont les équations horaires sont respectivement

$$x = -t^2 + 3t - 2\,;$$
$$x = -t^2 - 1.$$

1° Étudier ces deux mouvements. Construire les diagrammes des espaces et des vitesses sur un même système d'axes $t'Ot$ et $x'Ox$.

2° A quel instant les deux mobiles se rencontrent-ils ? Quelle est alors leur abscisse commune ? Quelles sont leurs vitesses ?

3° Soient P et P' les deux diagrammes des espaces. A quelle condition la droite $x = \frac{5}{6}t + m$ coupe-t-elle P en deux points A et B et P' en deux points A' et B' ? Montrer que lorsque cette condition est vérifiée on a toujours $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. En déduire que les courbes P et P' sont égales.

4° Que signifient pour les deux mouvements étudiés, les résultats obtenus en 3° ? Par un changement convenable de l'origine des temps pour le premier mouvement, mettre en évidence ces résultats sur l'équation horaire. (Clermont.)

1135. Sur l'axe Ox, on donne un point A, d'abscisse positive a. Un mobile M part de O, à l'époque zéro, avec une vitesse initiale positive v_0 et une accélération constante et égale à $+2$. Un deuxième mobile P part en même temps de A, avec une vitesse initiale négative $-v_1$ et une accélération constante et égale à $+4$.

1° Trouver la condition pour que les deux mobiles se rencontrent et dire combien de fois ils se rencontreront. Montrer que, dans le cas d'une rencontre unique, au moment où elle se produit, les deux mobiles vont dans le même sens et ont même vitesse.

2° Montrer qu'on peut trouver un troisième mobile qui, animé d'un mouvement uniforme, rencontrerait aux mêmes époques les deux mobiles précédents. Calculer sa vitesse et sa position initiale.

3° On suppose que les vitesses v_0 et v_1 sont telles qu'au bout d'une seconde M se trouve au milieu de OA et que P se trouve en A. Sur quelle portion de Ox doit alors se trouver le point A pour qu'il y ait rencontre ? Cas de la rencontre unique : époque et position de cette rencontre.

1136. Soient deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy ; A le point de Ox d'abscisse $+4$.

1° Un premier mobile, M, décrit l'axe Ox d'un mouvement uniformément varié. Il passe en A à la date $t = 0$ avec une vitesse nulle et il a une abscisse égale à 6 pour $t = 2$.

Un deuxième mobile N, décrit le même axe Ox dans le sens positif d'un mouvement uniforme ; il passe en O à l'instant $t = -1$; d'autre part, à un certain instant, les points M et N passent par la même position avec la même vitesse. Déterminer l'équation du mouvement de N. Représenter les diagrammes des mouvements de M et de N dans le même système d'axes.

2° Étudier la variation de la mesure du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sur Ox. Représenter graphiquement la fonction obtenue.

3° Sur l'axe Oy, on prend le point S d'ordonnée -3. A la date $t = 0$, un mobile P part de S et se déplace sur un axe Sz du plan xOy d'un mouvement uniforme de vitesse donnée positive v. On désigne par α l'angle de Sz avec Ox.

Calculer les coordonnées de P en fonction de t, v, α. Déterminer α pour que les mobiles P et M se rencontrent ; on trouvera une équation qu'on pourra résoudre en prenant pour inconnue $\operatorname{tg}\alpha$. Discuter suivant les valeurs de v.

En particulier, calculer v et $\operatorname{tg}\alpha$ pour que P rencontre à la fois M et N.

1137. Soient $x'x$, $y'y$ et $z'z$ trois axes deux à deux perpendiculaires qui se coupent en un point O. Trois mobiles A, B et C se déplacent respectivement sur $x'x$, $y'y$ et $z'z$. On pose $\overline{OA} = x$, $\overline{OB} = y$ et $\overline{OC} = z$. Les équations horaires des trois mouvements sont

$$x = 2 - 4t,$$
$$y = 3 + vt,$$
$$z = 2t^2 + 3t + z_0.$$

1° Déterminer v et z_0 pour que les trois mobiles passent simultanément au point O.

Dans ce qui suit, v et z_0 auront les valeurs ainsi déterminées.

2° Étudier les mouvements des trois mobiles et construire les diagrammes des espaces en utilisant un même système d'axes.

3° Montrer que, lorsque t varie, la droite AB se déplace parallèlement à elle-même.

4° Montrer que la distance d du point O au plan ABC est donnée par la relation

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}.$$

Calculer la valeur de cette distance à la date t et montrer que cette distance est nulle lorsque $t = \frac{1}{2}$ et $t = -2$. Ce résultat pouvait-il être prévu ? (Grenoble.)

1138. Un point mobile M décrit un axe $x'x$, partant de l'origine O à la date $t = 0$. Son mouvement est défini de la façon suivante :

Pour $0 \leqslant t < 1$ sa vitesse est constante et égale à v ;

Pour $1 \leqslant t < 2$ sa vitesse est constante et égale à $2v$;

. . . .

Pour $n \leqslant t < n + 1$ sa vitesse est constante et égale à $(n + 1)\,v$, n désignant un nombre entier positif.

1° Construire les diagrammes des espaces et des vitesses de ce mouvement et calculer l'abscisse x de M à la date $t = n$.

2° Un mobile N décrit $x'x$ d'un mouvement uniformément varié. Déterminer ce mouvement de manière que les points M et N coïncident aux dates $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$.

Y a-t-il également coïncidence à la date $t = n$?

3° Calculer en fonction ce t, la distance MN entre les dates $t = n$ et $t = n + 1$. Trouver le maximum de cette distance lorsque $n = 10$. (Besançon.)

1139. On se propose de faire tirer suivant la verticale une pièce d'artillerie placée en un point O pour atteindre un avion qui vole horizontalement en ligne droite et qui va survoler le point O.

Oy étant la verticale orientée vers le haut, Ox l'horizontale parallèle à la route de l'avion orientée dans le sens de la marche de l'avion, on prendra comme instant origine l'instant où l'avion se trouve à une abscisse $-a$ $(a > 0)$.

L'avion vole d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse V, à l'altitude constante h. Le projectile est lancé de O avec une vitesse initiale v_1, à un instant t_1 qu'il s'agit de déterminer ; il a un mouvement rectiligne uniformément varié dont l'accélération a pour mesure algébrique $-g$ sur Oy.

1° Écrire l'équation horaire du mouvement de l'avion, donnant son abscisse x à chaque instant t, en fonction de V et de a.

Écrire l'équation horaire du mouvement du projectile, donnant son altitude y à chaque instant t en fonction de v_1, de g et de l'instant t_1 de son départ.

2° Écrire l'équation qui donne l'instant t_1 où le projectile doit partir pour atteindre l'avion, en exprimant que le projectile se trouve à l'altitude h au moment où l'abscisse de l'avion est nulle.

En dessous de quelle altitude l'avion doit-il voler pour pouvoir être atteint ?

3° Cette condition étant supposée remplie, exprimer en fonction de V, h, v_1 et g la distance horizontale minima à laquelle l'avion doit être repéré pour que l'on puisse tirer deux fois sur lui.

Calculer alors le temps qui séparera les départs des deux coups de canon ; expliquer pourquoi ce temps est indépendant de la vitesse de l'avion. (Strasbourg.)

IV. Trigonométrie.

1140. On considère la fonction $y = \dfrac{x \sin^2 \alpha - 3}{x \cos \alpha + 2}$, dans laquelle x est la variable et α un angle donné compris entre 0 et π.

1° Pour quelles valeurs de α la fonction y est-elle croissante, décroissante, constante ?

2° Déterminer le coefficient angulaire de la tangente à la courbe représentative de la fonction y à son point de rencontre A avec l'axe des y

3° Vérifier que pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ce coefficient angulaire est égal à $\frac{2 + 3\sqrt{2}}{8}$.

4° Montrer qu'il existe une autre valeur de α pour laquelle le coefficient angulaire de la tangente en A a la même valeur

$$\frac{2 + 3\sqrt{2}}{8}.$$

Construire cet angle. (Grenoble.)

1141. Soient données deux droites parallèles OD, O'D' dont l'équidistance OO' = 1. Dans leur plan, on effectue successivement les constructions suivantes :

Par O, on mène OA faisant avec OD un angle α.

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) = \alpha \quad 0 < \alpha < \pi/2.$$

Par A (intersection de OA et O'D') la perpendiculaire AB à OA

Par B (intersection de AB et OD) la droite BC faisant avec BO un angle 2α. $(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BC}) = 2\alpha$. C'est enfin la projection de O sur BC.

Ces constructions effectuées, résoudre les questions suivantes :

1° Exprimer en fonction des lignes trigonométriques de α les mesures de OA, AB, BC, OC. Quel est le lieu du point C quand OA pivote autour du ploint O ?

2° Le point B étant supposé connu, il lui correspond un point C' autre que C ; comment sont liés C et C' ?

Calculer α dans les deux hypothèses suivantes

on donne OB = 4 ;

on donne BC = 2.

Exprimer en fonction de $\operatorname{tg} \alpha = t$, la surface S, le périmètre $2p$, le rayon r du cercle inscrit, le rayon r' du cercle exinscrit dans l'angle OBC du triangle OBC.

Exprimer en fonction de t la somme Σ des mesures des aires de ces deux cercles, ainsi que la somme V des mesures des volumes des sphères dont ils sont les grands cercles.

Déterminer l'angle α par la condition $V = 2\Sigma$. (Montpellier.)

1142. Soit l'équation du second degré

$$(2 \cos \alpha - 1)x^2 - 2x + \cos \alpha = 0,$$

α étant un angle compris entre 0 et π.

1° Étudier suivant les valeurs de α l'existence et le signe des racines x' et x''.

2° Calculer α lorsque $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} - 4 \sin \alpha = 0$.

3° Sur un axe orienté, on prend une origine O et deux points A et B ayant pour abscisses x' et x''. On trace le cercle de diamètre AB, et l'on se place dans le cas où l'on peut mener de O des tangentes à ce cercle. Si OT est une tangente, évaluer en fonction de α l'expression $y = \overline{OT}^2$.

4° En posant $\cos \alpha = m$, étudier les variations de y en fonction de m pour les valeurs convenables de m. Courbe représentative.

(Caen.)

1143. On considère l'équation

(1) $$x^2 + px + q = 0,$$

dans laquelle p et q sont deux constantes.

1° Établir la condition nécessaire et suffisante pour que cette équation admette deux racines dont l'une soit le sinus et l'autre le cosinus d'un même arc α, cet arc n'étant pas déterminé.

2° Calculer p et q pour que l'arc α de la première question soit égal à $\frac{\pi}{6}$.

Étudier, dans ce cas seulement, la variation du premier membre de l'équation (1). Interpréter sur le graphique la valeur imposée à l'arc α.

3° Calculer p et q pour que l'arc α vérifie la relation

(2) $$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha = m,$$

où m est un nombre donné positif. Discuter. Calculer ensuite les lignes trigonométriques de l'arc 2α en fonction de m en utilisant la relation (2). Expliquer les résultats obtenus en les comparant à ceux qu'on peut déduire des expressions que l'on a trouvées pour p et q au début de cette 3e question.

1144. On considère l'équation $3mx^2 - 2mx + m - 1 = 0$, où x est l'inconnue, m un paramètre.

1° Pour quelles valeurs de M a-t-elle deux racines x' et x'' ?

2° On pose $x' = \text{tg}\,B$, $x'' = \text{tg}\,C$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ étant deux angles compris entre 0° et 180°. On fait correspondre (quand c'est possible) un triangle ABC ayant ces deux angles en B et C.

Calculer m pour que le troisième angle, $\widehat{A}$, de ce triangle soit égal à 150°. L'angle A peut-il être droit ?

3° Comment faut-il choisir m pour qu'on puisse poser maintenant $x' = \sin B_1$, $x'' = \sin C_1$, $\widehat{B_1}$ et $\widehat{C_1}$ étant deux angles compris entre 0° et 90°.

4° Calculer m pour que $\widehat{B}_1 = 30°$. Résoudre alors l'équation.

On considère un triangle ABC, ayant des angles B_1 et C_1 correspondant à cette équation (donc $\widehat{B}_1 = 30°$).

Connaissant le côté $B_1C_1 = a$, calculer pour ce triangle : le rayon du cercle circonscrit ; la surface ; le rayon du cercle inscrit.

(Égypte.)

1145. On considère l'expression $y = \sin x \cos x + \sin^2 x$; x est supposé compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

1° Exprimer y en fonction de $\text{tg}\,x$.

2° On se donne y ; en déduire d'abord $t = \text{tg}\,x$; conditions de possibilité ; puis discuter le signe de x.

3° Montrer qu'entre les deux solutions t' et t'' donnant $t = \text{tg}\,x$ en fonction de y, il existe une relation linéaire liant $t' + t''$ et $t't''$, relation dont les coefficients sont indépendants de y.

4° Peut-on choisir y de façon que les deux valeurs x' et x'' correspondantes de x satisfassent à la condition $\text{tg}\,2x' = \text{tg}\,2x''$? Calculer alors x' et x''. (Rio de Janeiro.)

1146. On donne une dièdre droit dont les faces P et Q se coupent suivant la droite $x'Ox$. On trace dans la face P une demi-droite Oy qui fait avec Ox l'angle $\beta = 45°$, et dans la face Q une demi-droite Oz qui fait avec Ox l'angle $\gamma = 45°$.

1° Soit A un point donné d'abscisse positive $OA = a$ sur la droite $x'Ox$. On mène par A le plan perpendiculaire à cette dernière droite et l'on désigne par B et C les points où ce plan coupe Oy et Oz. Calculer en fonction de a la distance BC et en déduire la valeur en degrés de l'angle $yOz = \alpha$.

2° Calculer les lignes trigonométriques de l'angle aigu φ sous lequel se coupent les plans xOy, yOz.

3° Les angles β et γ ayant des valeurs quelconques comprises entre 0 et 90°, calculer $\cos \alpha$ et $\text{tg}\,\varphi$. Quelles sont alors, en fonction de a, β, γ, les expressions du volume A du tétraèdre OABC et du rayon R de la sphère circonscrite ?

1147. On donne un demi-cercle de diamètre AB = 2R et de centre O, la tangente $x'x$ en A à ce cercle. Par un point M du demi-cercle, on mène la perpendiculaire MH à $x'x$ et l'on prolonge MO jusqu'à sa rencontre avec $x'x$ en P.

1° Démontrer que MA est bissectrice de l'angle OMH quelle que soit la position de M sur le demi-cercle.

2° En posant $\widehat{AOM} = x$, calculer AP, AH, MH, MP en fonction de R et de $\text{tg}\,\frac{x}{2} = t$. *On envisagera deux cas de figure suivant que* $\widehat{AOM}$ *est aigu ou obtus.*

3° Déterminer t pour que MH + HA = Rk, k étant un nombre donné. Discuter en faisant varier x de 0 à π. Calculer la valeur de x correspondant au maximum de k.

4° Donner une solution géométrique du problème et retrouver les résultats de la discussion précédente.

5° Étudier la variation de Y = [illegible] + AP en fonction de t lorsque x varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Représentation graphique.

1148. Soit XY la perpendiculaire en I au plan d'un triangle rectangle AIB.

$$\widehat{I} = 90°, \qquad IA = IB = a\sqrt{2}.$$

C et D sont deux points de XY symétriques par rapport à I :

$$IC = ID = x, \qquad \widehat{CAD} = 2u.$$

1° Calculer $\cos 2\varphi$ en fonction de a et x, 2φ étant le rectiligne du dièdre (C, AB, D).

Application. — Calculer φ en degrés dans les deux cas suivants :

$$a)\ x = a\sqrt{3}\,; \quad b)\ x = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

2° Soit J le milieu de AB ; montrer que la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD est centrée en un point O, situé sur IJ, que l'on précisera en calculant IO. Calculer en fonction de a et x le rayon de cette sphère dans les deux cas suivants :

$$a)\ \text{tg}\,\varphi = \sqrt{3}\,; \qquad b)\ \text{tg}\,\varphi = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

3° On suppose maintenant que C est animé sur IX d'un mouvement rectiligne uniforme défini par l'équation horaire

$$x = t \text{ unités (cm/sec)}, \quad a = 5\sqrt{2}.$$

Indiquer la nature du mouvement du point O sur IJ, trouver son équation horaire ainsi que la vitesse et l'accélération instantanées. (Lyon.)

1149. On donne, dans un plan P, un cercle (O) de centre O et de rayon R, un point fixe A de ce cercle, et un diamètre variable BC tel que $\widehat{ABC} = \varphi\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$.

Sur la perpendiculaire en A au plan P, on porte AS = 2R et l'on considère le tétraèdre SABC.

1° Calculer en fonction de R et de φ les arêtes de ce tétraèdre. Montrer que la somme des carrés de ces arêtes reste constante quand φ varie. Quel est le lieu du pied H de la hauteur SH du triangle SBC ? Pour quelle position de BC l'aire du triangle SBC est-elle maximum ? Quel est ce maximum ?

2° Calculer, en fonction de φ, la tangente trigonométrique de l'angle $SHA = \alpha$. En déduire la valeur de φ qui correspond à la valeur minimum du dièdre d'arête BC. Calculer φ pour que l'on ait $\text{tg}\,\alpha = \frac{4}{\sqrt{3}}$. Calculer $\text{tg}\,\alpha$ quand $\varphi = 60°$.

3° On suppose $\varphi = 60°$. Par le point M du segment AB tel que AM = x on mène le plan Q parallèle à AS et BC. Montrer que la section du tétraè-

dre par le plan Q est un rectangle. Évaluer son aire S en fonction de R et de x. Variation de S en fonction de x quand M décrit AB. Représentation graphique. Calculer x pour que S ait une valeur donnée m^2. Discuter en utilisant le graphique précédent. Pour quelle position de M l'aire S est-elle maximum ? Valeur du maximum.

N. B. — Les trois questions sont indépendantes. (Dijon.)

1150. On considère un trièdre SABC, dont on appellera a, b, c les angles des faces :

$$a = \widehat{BSC}, \quad b = \widehat{CSA}, \quad c = \widehat{ASB},$$

et α, β, γ les angles que font respectivement les arêtes SA, SB, SC avec les faces opposées.

Tous ces angles sont supposés compris entre 0 et π. On fera la figure en les supposant tous aigus.

1° On porte sur les arêtes du trièdre, à partir du sommet, trois longueurs égales, SA = SB = SC. Démontrer, en évaluant de plusieurs façons le volume du tétraèdre SABC, les relations

$$\sin \alpha . \sin a = \sin \beta . \sin b = \sin \gamma . \sin c.$$

2° On mène par le point A un plan perpendiculaire à l'arête SA qui coupe les deux autres arêtes en B' et C'. Exprimer, en évaluant de plusieurs façons le volume du tétraèdre SAB'C', le rapport $\frac{\sin a}{\sin A}$ en fonction des seuls angles précédemment définis, A représentant dans cette expression la mesure de l'angle dièdre relatif à l'arête SA.

En conclure, en utilisant les résultats démontrés au paragraphe 1°, qu'il existe, entre les angles dièdres et les faces du trièdre, les relations

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$ (Aix-Marseille.)

1151. On considère un cercle de centre C, de rayon R et un point A situé à une distance de O égale à $\frac{2R}{3}$. Une corde CAB fait avec AO un angle α $(0 < \alpha < 90°)$. On désigne par I le milieu de cette corde, par β l'angle BOI et par S le point de concours des tangentes au cercle en B et C.

1° Démontrer que $\cos \beta = \frac{2}{3} \sin \alpha$.

2° Calculer, en fonction de R et α, les longueurs OI, IB, OS.

3° Soit H le pied de la perpendiculaire menée de S sur OA. Calculer OH et en déduire le lieu de S lorsque α varie.

4° On considère une sphère de centre O, de rayon R et un point A situé à une distance de O égale à 2R/3. Un plan passant par A, faisant avec OA l'angle α $(0 < \alpha < 90°)$, coupe la sphère suivant un cercle γ. Calculer le volume V du cône de sommet O ayant pour base le cercle γ.

Le cône circonscrit à la sphère le long de γ a un volume V_1 ; calculer $V' = V + V_1$.

5° On pose $V/V' = y$ et $\cos \alpha = x$. Calculer y en fonction de x. Étudier les variations de y et construire la courbe représentative lorsque α varie de 0° à 90°.

Calculer la pente de la tangente à cette courbe et construire cette tangente au point d'abscisse 1.

Vérifier géométriquement la valeur trouvée pour y lorsque $x = 0$. (Madagascar.)

TABLE DES MATIÈRES

ALGÈBRE

Chapitre I. — Nombres algébriques.

Chapitre II. — Expressions algébriques.

Chapitre III. — Fonctions d'une variable.

Chapitre IV. — Étude des fonctions élémentaires.

Chapitre V. — Équation du premier degré a une inconnue.

Chapitre VI. — Systèmes d'équations du premier degré.

Chapitre VII. — Problèmes du premier degré.

Imprimerie A. TAFFIN-LEFORT, à Lille (France). — 10-2-54.
Imprimé en France.